Korteste vej, $\mathbf{A}^*$

Lad a og z være punkter i en vægtet graf $G = (V, E)$. Vi ønsker at bestemme en korteste vej fra a til z. dist(u, v) betegner afstanden mellem punkterne u og v, altså længden af en korteste vej fra u til v.

Til hvert punkt x vil vi nu knytte et tal $h(x)$ som opfylder $h(x) \leq$ dist(x, z).

Lad $h : V \mapsto \mathbb{R}$ være en funktion som opfylder at

$$h(u) - h(v) \leq w(u, v). \tag{1}$$

for ethvert par af punkter u og v, som er forbundet af en kant.
(Der skal dermed også gælde at $h(v) - h(u) \leq w(u, v)$.)

Lemma. Hvis h er en funktion der opfylder (1) så gælder der for ethvert par af punkter u og v at

$$h(u) - h(v) \leq \text{dist}(u, v).$$

Bevis. Lad $u = x_0, x_1, \ldots, x_t = v$ være en korteste vej. $\text{dist}(u, v) = \sum_{i=1}^{t} w(x_{i-1}, x_i)$.
Lemmaet bevises ved induktion efter t.
Basisskridt. Hvis $t = 1$ så er $\text{dist}(u, v) = w(u, v)$ og lemmaet er opfyldt ifølge (1).
Induktionsskridt. Lad $k \geq 1$ og antag Lemmaet er sandt hvis $t = k$.
Lad nu u og v være punkter så den korteste vej $u = x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1} = v$ bruger $k+1$ kanter. Ifølge induk-

tionsantagelsen og (1) er

$$\begin{aligned}\text{dist}(u,v) &= \text{dist}(u,x_k) + w(x_k,v) \\ &\geq (h(u) - h(x_k)) + (h(x_k) - h(v)) \\ &= h(u) - h(v).\end{aligned}$$

$\square$

Hvis h opfylder (1) og

$$h(z) = 0, \tag{2}$$

så får vi fra lemmaet at

$$\text{dist}(x,z) \geq h(x) - h(z) = h(x).$$

Procedure $A^*(G = (V, E)$: vægtet sh. graf,
a, z: punkter,
h: funktion der opfylder (1) og (2))

For alle $v \in V$: $L(v) := \infty$
$L(a) := 0$, $S := \emptyset$
while $z \notin S$
begin
  $u :=$ punkt ikke i S, så $L(u) + h(u)$ er mindst mulig
  $S := S \cup \{u\}$
  For alle v hvor $\{u, v\} \in E$ og $v \notin S$
    if $L(u) + w(u, v) < L(v)$ **then**
    begin
      $L(v) := L(u) + w(u, v)$
    end
end $\{$Den korteste vej fra a til z har længde $L(z)\}$

Invariant:

1. Hvis $v \in S$ så er $L(v)$ længden af en korteste vej fra a til v i G. Mindst én sådan vej er indeholdt i S.

2. Hvis $v \notin S$ så er $L(v)$ længden af en korteste vej fra a til v, hvor alle vejens punkter er i $S \cup \{v\}$.

Invarianten er sand før første gennemløb af while-løkken.

Antag invarianten er sand før et gennemløb.
1. Antag $v \in S_{\mathsf{ny}}$. Vi skal vise at $L_{\mathsf{ny}}(v)$ er længden af en korteste vej fra a til v.
Hvis $v \in S$ så er $L(v) = L_{\mathsf{ny}}(v)$ og påstanden opfyldt.
Antag derfor $v = u$.
Da 2. er sand før gennemløbet, er $L_{\mathsf{ny}}(u) = L(u)$ længden af en korteste $a - u$ vej i $S \cup \{u\} = S_{\mathsf{ny}}$. Antag at $a = x_0, x_1, \ldots, x_t = u$ er en vej af længde mindre end $L(u)$. Denne er så ikke indeholdt i $S \cup \{u\}$. Lad x_i være det første punkt på vejen udenfor $S \cup \{u\}$. Så er

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dist}(a,u) &= \mathrm{dist}(a,x_i) + \mathrm{dist}(x_i,u) && (3)\\
&= L(x_i) + \mathrm{dist}(x_i,u) && (4)\\
&\geq L(x_i) + (h(x_i) - h(u)), && (5)
\end{aligned}
$$

hvor 2. er brugt på vejen $a = x_0, \ldots, x_i$ i $S \cup \{x_i\}$ og lemmaet. På grund af valget af u ved vi at $L(u)+h(u) \leq L(x_i) + h(x_i)$. Derfor er

$$\mathrm{dist}(a, u) = L(x_i) + h(x_i) - h(u) \geq L(u),$$

i modstrid med antagelsen om at længden af vejen var mindre end $L(u)$. $L(u)$ er altså længden af en korteste $a - u$ vej. Dermed er 1. bevist.

2. Lad $v \notin S_{\text{ny}}$. Vi skal vise at L_{ny} er længden af en korteste $a-v$ vej der er indeholdt i $S_{\text{ny}} \cup \{v\} = S \cup \{u, v\}$.

Lad $a = x_0, x_1, \ldots, x_t = v$ være en korteste vej indeholdt i $S \cup \{u, v\}$. Hvis $u = x_i$ er et punkt på vejen og $x_{i+1} \in S$ så er $a = x_0, \ldots, x_{i+1}$ en korteste vej. Ifølge 1. findes en anden vej $a = y_0, y_1, \ldots, y_s = x_{i+1}$ som har samme længde og er helt indeholdt i S. Og $a = y_0, y_1, \ldots, y_s = x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_t = v$ er anden korteste vej fra a til v indeholdt i $S \cup \{u, v\}$.

Vi kan derfor antage at vejen $a = x_0, x_1, \ldots, x_t = v$ enten ikke indeholder u eller $u = x_{t-1}$.
I første tilfælde har vejen længde $L(v)$ ifølge 2. I andet tilfælde har vejen længde $L(u) + w(u, v)$.
Da vores vej er en korteste vej (indeholdt i $S \cup \{u, v\}$) er længden det mindste af de to tal. Dette er netop $L_{\mathsf{ny}}(v)$. 2. er bevist.

I litteraturen benyttes ofte følgende notation:

$$\text{Closedset} = S$$

$$\text{Openset} = \{v \mid L(v) < \infty\}$$

$$g(x) = L(x)$$

$$f(x) = L(x) + h(x)$$