DMat-06

3.2: Store O.

$f(x), g(x)$ funktioner der er defineret når x er et tilstrækkeligt stort helt eller reelt tal. $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$.

Vi siger at $f(x)$ er $O(g(x))$ hvis der findes konstanter C, k så

$$|f(x)| \leq C|g(x)|, \text{ for alle } \ x > k.$$

Vi siger at $f(x)$ er $\Omega(g(x))$ hvis der findes konstanter $C > 0, k$ så

$$|f(x)| \geq C|g(x)|, \text{ for alle } \ x > k.$$

$$f(x) \text{ er } \Omega(g(x)) \Leftrightarrow g(x) \text{ er } O(f(x)).$$

Vi siger at $f(x)$ er $\Theta(g(x))$ hvis $f(x)$ er $O(g(x))$ og $f(x)$ er $\Omega(g(x))$.

Idé: $f(x)$ er et kompliceret udtryk, eller funktion der ikke kan beregnes præcist. $g(x)$ er et simpelt udtryk.

Hvis $f(x)$ er $O(g(x)$ så "vokser $f(x)$ ikke hurtigere end $g(x)$".

Hvis $f(x)$ er $\Omega(g(x))$ så "vokser $f(x)$ mindst lige hurtigt som $g(x)$".

Korollar 1
Hvis $f_1(x)$ er $O(g(x))$ og $f_2(x)$ er $O(g(x))$
så er $f_1(x) + f_2(x)$ også $O(g(x))$.

Sætning 4
Lad $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, hvor $a_n \neq 0$
($f(x)$ er altså et vilkårligt polynomium af grad n)
Så er $f(x)$ $O(x^n)$ og x^n er $O(f(x))$.
Altså: $f(x)$ er $\Theta(x^n)$.

3.3: Kompleksitet af algoritme.

n : mål for størrelsen af input.

$f(n)$: det største antal skridt algoritmen bruger hvis inputtet har størrelse n. (worst case)

Find et simpelt udtryk $g(n)$ så $f(n)$ er $O(g(n))$.

Vi siger at algoritmen har (tids-) kompleksitet $O(g(n))$.

Sætning (Standseproblemet).
Der findes ikke en procedure $H(P, I)$, der læser en procedure P og et input I til P, og som giver output:

“standser” hvis $P(I)$ standser,
“uendelig løkke” hvis $P(I)$ ikke standser.

Bevis (ved modstrid).
Antag H eksisterer.

Konstruer en ny procedure:

Procedure $K(P)$
if $H(P,P)$ svarer "standser" **then**
    gå i uendelig løkke
else stands

Standser $K(K)$???

Hvis $K(K)$ standser så giver $H(K,K)$ output "standser". Dermed går $K(K)$ i en uendelig løkke.

Hvis $K(K)$ ikke standser så giver $H(K,K)$ output "uendelig løkke". Dermed standser $K(K)$. $\square$