DMat-12

Betragt en while-løkke i en procedure.
En invariant er et udsagn, som vi skal bevise er sandt før og efter hvert gennemløb af løkken.

$P(n)$: invarianten er sand efter n gennemløb af løkken.

Vi skal bevise:

- Invarianten er sand før første gennemløb. Altså $P(0)$ er sand.

- Hvis invarianten er sand før et gennemløb så er den også sand efter. Altså $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ for alle $k \geq 0$.

Ifølge induktionsprincippet er $P(n)$ sand for alle $n \geq 0$. Dermed er invarianten altid sand.

Også efter sidste gennemløb.

procedure factorial(n: ikke-negativt helt tal)

$i := 0$

$x := 1$

while $i < n$

{ invariant: $x = i!$ og $i \leq n$}

begin

  $i := i + 1$

  $x := x \cdot i$

end

$\{ x = n! \}$

Definition. Let G være en ikke-orienteret graf. Lad $n \geq 0$ være et helt tal og lad u og v være punkter i G. En vej (path) af længde n fra u til v er en følge af kanter

$$e_1, e_2, \ldots, e_n$$

i G, som opfylder at der findes punkter

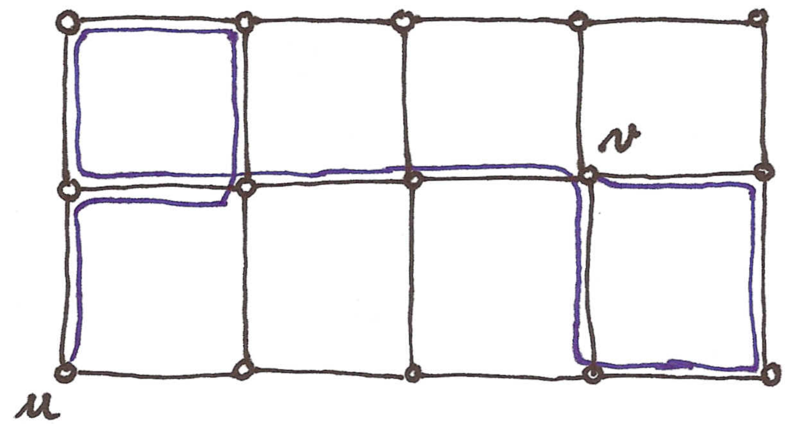
$$u = x_0, x_1, \ldots, x_n = v$$

i G sådan at

$$e_i \text{ har endepunkter } x_{i-1} \text{ og } x_i, \text{ for alle } i = 1, \ldots n.$$

Hvis $u = v$ og $n > 0$ så kaldes vejen en kreds.
Vejen (kredsen) siges at være simpel hvis alle kanterne $e_1, \ldots, e_n$ er forskellige.

En vej fra u til v



Beskrivelse af vejen:
* følgen af kanter man kommer igennem fra u til v
* følgen af punkter man besøger fra u til v

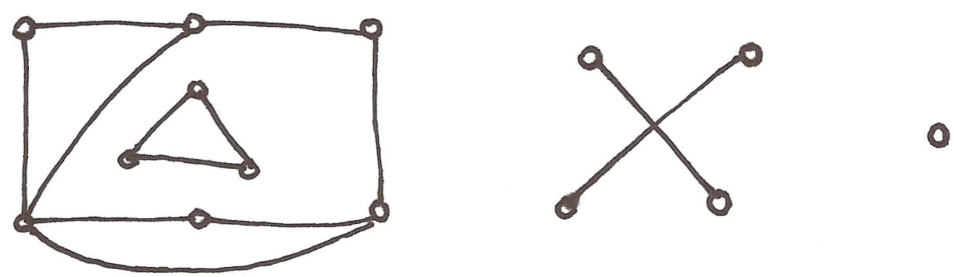
I en vej kan punkter og kanter gentages.
I en simpel vej gentages kanter ikke, men vejen kan gå gennem samme punkt flere gange.

Sætning 1. I en kortest vej fra u til v bruges hver kant og hvert punkt højst én gang.

Bemærk: andre bøger stiller andre krav til en vej.

En ikke-orienteret graf G siges at være sammenhængende hvis der er en vej fra u til v i G for ethvert par af punkter u og v i G.

En sammenhængskomponent i en graf G er en sammenhængende delgraf af G som ikke er delgraf af en anden sammenhængende delgraf af G.



En graf med 5 sammenhængskomponenter.

En vægtet graf er en (ikke-orienteret, simpel) graf $G = (V, E)$ med en vægtfunktion

$$w : E \mapsto \mathbb{R}.$$

Længden af en vej $e_1, e_2, \ldots, e_k$ i en vægtet graf er

$$w(e_1) + w(e_2) + \ldots + w(e_k).$$

Vægten af en kant $e = \{u, v\}$ skrives også $w(e) = w(u, v)$.

Vi kan eventuelt kræve at $w(e) > 0$ for alle kanter $e \in E$ i en vægtet graf.

Procedure Dijkstra($G = (V, E)$: vægtet sh. graf,
a, z: punkter)

$\{$ Det antages at $w(e) > 0$ for alle $e \in E\}$

For alle $v \in V$: $L(v) := \infty$

$L(a) := 0, \quad S := \emptyset$

while $z \notin S$

begin

  $u :=$ punkt ikke i S, så $L(u)$ er mindst mulig

  $S := S \cup \{u\}$

  For alle v hvor $\{u, v\} \in E$ og $v \notin S$

    if $L(u) + w(u, v) < L(v)$ **then**

    begin

      $L(v) := L(u) + w(u, v)$

    end

end $\{$Den korteste vej fra a til z har længde $L(z)\}$