DMat-15

Procedure Prim (G: vægtet graf med n punkter)
$T :=$ træ bestående af ét punkt
for $i := 1$ **to** $n - 1$
begin
    $e :=$ kant med minimal vægt mellem
        et punkt i T og et punkt ikke i T
    Tilføj e og endepunkt til T
end
{ T er et minimum vægt udspændende træ}

Procedure Prim ($G = (V, E)$: vægtet graf med n punkter)

$T :=$ træ bestående af ét punkt v_1

for alle punkter $u \neq v_1$

    if $\{v_1, u\} \in E$ **then** $L(u) := w(v_1, u)$ **else** $L(u) := \infty$

{For $u \notin T$: $L(u) =$ længden af korteste kant fra u til T}

for $i := 1$ **to** $n - 1$

begin

    vælg $u \notin T$ så $L(u)$ er minimal

    $T := T \cup \{u\} \cup \{$korteste $u - T$ kant$\}$

    for alle v hvor $\{u, v\} \in E, v \notin T$

        if $w(u, v) < L(v)$ **then** $L(v) := w(u, v)$

end

Eksempel 1.

G : komplet graf med punkter $v_1, \ldots, v_6$.
Kanterne har vægt angivet i følgende tabel:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Prims algoritme kan vælge følgende kanter:
$\{v_1, v_3\}$, $\{v_3, v_2\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_5, v_6\}$.

Procedure Kruskal(G: vægtet graf)
sorter G's kanter $e_1, \ldots, e_m$ efter vægt så $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \ldots \leq w(e_m)$.
$T :=$ skov uden kanter
for $i := 1$ **to** m
    if $T \cup \{e_i\}$ ikke har simpel kreds **then**
        $T := T \cup \{e_i\}$
{ T er et minimum vægt udspændende træ.}

Eksempel 1, fortsat.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kanterne sorteret efter vægt:
$\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\{v_5, v_6\}$, $\{v_1, v_2\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_4, v_6\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_3, v_5\}$, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_1, v_5\}$, $\{v_1, v_6\}$, $\{v_2, v_5\}$, $\{v_3, v_6\}$, $\{v_2, v_6\}$.
De røde kanter vælges af Kruskals algoritme

Kompleksitet af Kruskals algoritme: $O(m \log m)$

Kompleksitet af Prims algoritme: $O(n^2)$

Anvendelse: Travelling Salesman Problem.

Lad G være en vægtet komplet graf, der opfylder

$$w(x, y) \leq w(x, z) + w(z, y)$$

for alle punkter x, y og z (trekantsuligheden).

Lad C være en kortest Hamiltonkreds i G (en løsning til TSP).

Lad T være minimum vægt udspændende træ i G og lad T' være udspændende træ der fremkommer fra C ved at slette en kant.

Så er $w(T) \leq w(T') < w(C)$.

Udfør en dybde først søgning i T. Derved besøges alle punkter i G. Hver kant i T bruges to gange i denne rute. Længden af ruten er $2w(T) < 2w(C)$.

Ved hjælp af trekantsuligheden kan denne rute afkortes til en rute der kun besøger hvert punkt én gang og som får længde mindre end $2w(C)$.

Eksempel 1, fortsat.

Dybde først søgning i træet fra Prims algoritme besøger punkterne i følgende rækkefølge:

$$v_1, v_3, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_5, v_4, v_3, v_1.$$

Denne rute afkortes til

$$v_1, v_3, v_2, v_4, v_5, v_6, v_1,$$

som har længde 12.

$G = (V, E)$: en simpel graf.
k : et positivt helt tal

En k-farvning af G er en funktion

$$c : V \mapsto F,$$

hvor F er en mængde af k “farver” (f.eks. $F = \{1, 2, \ldots, k\}$) og hvor c opfylder at hvis $\{u, v\} \in E$ så er $c(u) \neq c(v)$.

Det mindste k som opfylde at G har k-farvning kaldes det kromatiske tal af G og skrives $\chi(G)$.