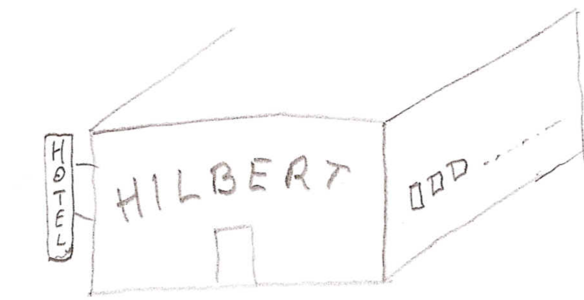
DMat-19

To mængder A og B har samme kardinalitet ($|A| = |B|$) hvis der findes en bijektiv funktion (one-to-one correspondence) $A \mapsto B$.

Hvis $|A| = |\{1, 2, \ldots, n\}|$ hvor $n \in \mathbb{Z}^+$ så har A kardinalitet n, skrives $|A| = n$.
$|\emptyset| = 0$.
Hvis $|A| = n \in \mathbb{N}$ så siger vi at A er endelig. Ellers er A uendelig.

Hvis $|A| = |\mathbb{Z}^+|$ så siger vi at A har kardinalitet alef-0, $|A| = \aleph_0$.
Hvis A er endelig eller $|A| = \aleph_0$ så siger vi at A er tællelig. Ellers er A overtællelig.



Hotel Hilbert har uendeligt mange værelser numereret $1, 2, 3, \ldots$.

Alt er optaget.

Der ankommer en ny gæst.

Flyt gæsten i værelse i til værelse $i + 1$, for alle $i \in \mathbb{Z}^+$.

Værelse 1 er ledigt til ny gæst.

Eksempler på mængder med kardinalitet $\aleph_0$:

$\mathbb{Z}^+$

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$

Enhver uendelig delmængde af $\mathbb{Q}$

Σ^*, hvor Σ er et endeligt alfabet.

$A \cup B$ og $A \times B$, hvor $|A| = |B| = \aleph_0$.

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, hvor $|A_i| = \aleph_0$ for alle $i \in \mathbb{Z}^+$.

Mængden af alle endelige delmængder af $\mathbb{Z}^+$.

Eksempler på mængder med kardinalitet $2^{\aleph_0}$:

$P(\mathbb{Z}^+)$

$\mathbb{R}$

Ethvert interval $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, hvor $a < b$.

$\mathbb{R}^n$, hvor $n \in \mathbb{Z}^+$

Produktregel.

Hvis valg af et element i en mængde kan opdeles i et

valg af ét af n_1 elementer

efterfulgt af

valg af ét af n_2 elementer

så har mængden $n_1 n_2$ elementer.

Sumregel.

Hvis valg af et element i en mængde kan udføres som enten

valg af ét af n_1 elementer

eller

valg af ét af n_2 elementer

så har mængden $n_1 + n_2$ elementer.

Problemer, der løses af algoritme, der svarer JA eller NEJ til inputtet.
Hierarki af sværhedsgrader (m.h.t. kompleksitet):

P:	problemer der løses af hurtig algoritme (polynomiel tid)
NP:	blanding af lette og vanskelige problemer (let at svare JA)
NP-komplet:	meget vanskelige problemer

Millon dollar spørgsmål: er $P = NP$?
De fleste gætter: Nej!, men man kan ikke bevise det.

Hvis man finder en polynomiel-tids algoritme, der kan løse bare ét af de tusindvis af kendte NP-komplette problemer, så kan samme algoritme bruges til at løse alle problemer NP i polynomiel tid.

Eksempler på NP-komplette problemer:

Hamilton-kreds
Input: graf G
Spørgsmål: har G en Hamilton-kreds.

TSP
Input: vægtet komplet graf K, en konstant C
Spørgsmål: har K en Hamilton-kreds af længde højst C.

k*-farvning*, $k \geq 3$
Input: graf G
Spørgsmål: har G en farvning med k farver.