DMat-22

Sætning
$f : \mathbb{Z}^+ \mapsto \mathbb{R}$ en voksende funktion som opfylder
$f(n) = af(\frac{n}{b}) + cn^d$ for $n = b^k$, hvor $k \in \mathbb{Z}^+$ og
$b \in \mathbb{Z}$, $b \geq 2$, $a, c, d \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$, $c > 0$, $d \geq 0$.

Hvis $a < b^d$ så er $f(n) \quad O(n^d)$.

Hvis $a = b^d$ så er $f(n) \quad O(n^d \log n)$.

Hvis $a > b^d$ så er $f(n) \quad O(n^{\log_b a})$.

Multiplikation $a \cdot b$ af to $2n$ cifrede tal i base d.

Lad $a = (a_{2n-1}a_{2n-2}\ldots a_1 a_0)_d$
(altså $a = a_{2n-1}d^{2n-1} + a_{2n-2}d^{2n-2} + \ldots + a_1 d + a_0$), og
og $b = (b_{2n-1}b_{2n-2}\ldots b_1 b_0)_d$.

Sæt $A_1 = (a_{2n-1}\ldots a_n)_d, \qquad A_0 = (a_{n-1}\ldots a_0)_d$
og $\quad B_1 = (b_{2n-1}\ldots b_n)_d, \qquad B_0 = (b_{n-1}\ldots b_0)_d$.

Så er $a = A_1 d^n + A_0$ og $b = B_1 d^n + B_0$.

Udregn $A_1 - A_0$ og $B_0 - B_1$ og udfør tre multiplikationer

$$A_1 B_1, \qquad (A_1 - A_0)(B_0 - B_1), \qquad A_0 B_0$$

sæt 0'er efter:

$A_1 B_1 d^{2n}$, $A_1 B_1 d^n$, $(A_1 - A_0)(B_0 - B_1) d^n$, $A_0 B_0 d^n$, $A_0 B_0$

og adder disse tal.

Hvis $f(n)$ angiver antal regneoperationer på tal med et ciffer så er

$$f(2n) = 3f(n) + cn,$$

idet der foretages tre multiplikationer af tal med n cifre. cn angiver det antal operationer, der kræves for at udføre additionerne og tilføjelsen af 0'er.

Vi får at $f(n)$ er $O(n^{\log_2 3})$.

$\log_2 3 \approx 1,58496$.

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Sætning

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{I} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} A_i|,$$

hvor der summeres over ikke-tomme delmængder $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Ikke-tomme delmængder af $\{1, 2, 3\}$:

$$\begin{array}{lll}
I = \{1\} & (-1)^{|I|+1}|A_1| = & |A_1| \\
I = \{2\} & (-1)^{|I|+1}|A_2| = & |A_2| \\
I = \{3\} & (-1)^{|I|+1}|A_3| = & |A_3| \\
I = \{1,2\} & (-1)^{|I|+1}|A_1 \cap A_2| = & -|A_1 \cap A_2| \\
I = \{1,3\} & (-1)^{|I|+1}|A_1 \cap A_3| = & -|A_1 \cap A_3| \\
I = \{2,3\} & (-1)^{|I|+1}|A_2 \cap A_3| = & -|A_2 \cap A_3| \\
I = \{1,2,3\} & (-1)^{|I|+1}|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = & |A_1 \cap A_2 \cap A_3|
\end{array}$$

Anvendelse.

Et derangement af $1, 2, \ldots, n$ er en permutation $a_1, a_2, \ldots, a_n$ hvor $a_i \neq i$ for alle i.

Antal derangements

$$D_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Dette kan udregnes som $\frac{n!}{e}$ afrundet til nærmeste hele tal.

Derangements af $1, 2, 3, 4$:

$2, 1, 4, 3$

$2, 3, 4, 1$

$2, 4, 1, 3$

$3, 1, 4, 2$

$3, 4, 1, 2$

$3, 4, 2, 1$

$4, 1, 2, 3$

$4, 3, 1, 2$

$4, 3, 2, 1$

Der $D_4 = 9$ derangements af fire elementer.

$n = 4$

$A_i = \{\text{permutationer } a_1a_2a_3a_4 \mid a_i = i\}$

$|A_i| = 3! = 6$
$|A_i \cap A_j| = 2! = 2$
$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 1$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$

$$
\begin{aligned}
&D_4 = 4! - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \\
&4! - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| \\
&\quad -|A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\
&\quad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| \\
&\quad +|A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|) = \\
&4! - (4 \cdot 3! - 6 \cdot 2! + 4 \cdot 1 - 1) = 9 = \\
&4!(1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!}).
\end{aligned}
$$