Facit til prøve-Eksamen1 i Diskret Matematik

Opgave 1

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x \leq 2\} \ \text{ og } \ B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x \leq 4\}.$$

Lad $f(x) = 3x - 2$. Når $\in A$ er $f(x) \in B$.
$f(x) = y \Leftrightarrow 3x - 2 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+2}{3}$. Når $y \in B$ er $\frac{y+2}{3} \in A$.
Da $f(x) = y$ har entydig løsning $x \in A$ for ethvert $y \in B$ er funktionen $f : A \mapsto B$ en bijektion. Altså $|A| = |B|$.

Opgave 2

Hvis $x > 1$ er $x < x^2$, $1 < x^2$ og
$|f(x)| = |5x^2 + 7x + 4| = 5x^2 + 7x + 4 < 5x^2 + 7x^2 + 4x^2 = 16x^2 = 16|x^2|$.
Hvis $K = 1, C = 16$ så er $|f(x)| < C|x^2|$ for alle $x > K$.

Opgave 3

$$i \in \mathbb{N} \ \wedge \ i \leq n \ \wedge \ x = 3^i + (-2)^i \ \wedge \ y = 3^{i-1} + (-2)^{i-1} \tag{1}$$

Før første gennemløb af while er $x = 1, y = 2, i = 1$. Dermed er (1) sand (da $n \geq 1$).
1. Antag (1) er sand før et gennemløb af while-løkken. Da løkken gennemløbes igen er betingelsen $i < n$ sand.
Efter gennemløbet:
$i_{\text{ny}} = i + 1$. Da $i < n$ og $i \in \mathbb{N}$ er $i_{\text{ny}} \leq n$ og $i_{\text{ny}} \in \mathbb{N}$.
$x_{\text{ny}} = z = x + 6y = 3^i + (-2)^i + 6 \cdot 3^{i-1} + 6 \cdot (-2)^{i-1} = 3^i + (-2)^i + 2 \cdot 3^i - 3 \cdot (-2)^i = 3 \cdot 3^i + (-2)(-2)^i = 3^{i_{\text{ny}}} + (-2)^{i_{\text{ny}}}$.
$y_{\text{ny}} = x = 3^i + (-2)^i = 3^{i_{\text{ny}}-1} + (-2)^{i_{\text{ny}}-1}$.
(1) er altså sand efter gennemløbet. Dermed er (1) en invariant.
2. Når while-løkken standser er betingelsen $i < n$ falsk, men (1) er sand. Dermed er $i = n$ og $x = 3^i + (-2)^i = 3^n + (-2)^n$.

Opgave 4

1. Mulig løsning: $e_4, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_5, e_8$.
2. Mulig løsning: $e_9, e_5, e_4, e_{11}, e_{12}, e_8, e_{10}$.

Opgave 5

1. En Hamilton kreds: $e_9, e_2, e_{10}, e_8, e_{11}, e_3, e_{12}, e_5$. (Der er flere andre Hamilton-kredse.)
2. Grafen har ingen Euler-kreds da der er punkter med ulige grad.

Opgave 6

$111 \mod 11 = 1 \quad$ (da $111 = 10 \cdot 11 + 1$)
$222 \mod 11 = 2$
$333 \mod 11 = 3$
$444 \mod 11 = 4$
Derfor er $111 \cdot 222 + 333 \cdot 444 \equiv 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \equiv 3 \pmod{11}$.
Altså $(111 \cdot 222 + 333 \cdot 444) \mod 11 = 3$.

Opgave 7

$85 = 1 \cdot 65 + 20 \qquad 20 = 85 - 65$
$65 = 3 \cdot 20 + 5 \qquad 5 = 65 - 3 \cdot 20 = 65 - 3(85 - 65) = 4 \cdot 65 - 3 \cdot 85$
$20 = 4 \cdot 5 + 0$
Altså $\gcd(65, 85) = 5 = 4 \cdot 65 + (-3) \cdot 85$. $s = 4, t = -3$

Opgave 8

1. $a_1 = \frac{1+2}{1} \cdot 2 = 6$, $a_2 = \frac{2+2}{2} \cdot 6 = 12$, $a_2 = \frac{3+2}{3} \cdot 12 = 20$.
2. Vis at $a_k = k^2 + 3k + 2$, for alle $k \geq 0$.
Bevis ved induktion.
Basisskridt $k = 0$: $a_0 = 2 = 0^2 + 3 \cdot 0 + 2$
Induktionsskridt: Lad $m \geq 0$ og antag at $a_m = m^2 + 3m + 2$.
Skal vise ligningen med $k = m + 1$:
Venstre side: $a_{m+1} = \frac{(m+1)+2}{m+1} a_m = \frac{m+3}{m+1}(m^2 + 3m + 2)$
Højre side: $(m + 1)^2 + 3(m + 1) + 2 = m^2 + 5m + 6$.
V.S=? H.S.: $\frac{m+3}{m+1}(m^2 + 3m + 2) = m^2 + 5m + 6 \quad \Leftrightarrow$
$(m + 3)(m^2 + 3m + 2) = (m + 1)(m^2 + 5m + 6)$,
hvilket ved udregning ses at være korrekt. Ligningen er altså opfyldt for $k = m + 1$ og dermed for ethvert $k \geq 0$.

Opgave 9

$$x \equiv 2 \pmod 4 \quad \wedge \quad x \equiv 3 \pmod 9.$$

$4 \cdot 9 = 36.$
$\gcd(9, 4) = 1 = 1 \cdot 9 + (-2) \cdot 4$, da
$9 = 2 \cdot 4 + 1$ $\qquad\qquad\qquad$ $1 = 9 - 2 \cdot 4.$
En løsning:
$x = 2 \cdot 9 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot (-2) = -6.$
En anden løsning:
$x = -6 + 36 = 30.$
x er løsning hvis og kun hvis $x \equiv 30 \pmod{36}$.

Opgave 10

En mængde S, $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, er defineret rekursivt ved

- $(0, 0) \in S$,
- hvis $(a, b) \in S$ så er $(a + 1, b + 3), (a + 2, b + 2)$ og $(a + 3, b + 1)$ også i S.

1. $(0, 0) \in S \Rightarrow (0 + 1, 0 + 3) = (1, 3) \in S \Rightarrow (1 + 1, 3 + 3) = (2, 6) \in S \Rightarrow (2 + 2, 6 + 2) = (4, 8) \in S$.
2. Hvis $(a, b) \in S$ så er $4 \mid a + b$
Bevis ved strukturel induktion.
Basisskridt $(a, b) = (0, 0)$: $4 \mid 0 + 0$.
Rekursionsskridt: Lad $(a, b) \in S$ og antag $4 \mid a + b$.
Lad (a', b') være konstrueret fra (a, b). Altså $(a', b') \in \{(a + 1, b + 3), (a + 2, b + 2), (a + 3, b + 1)\}$.
Så er $a' + b' = a + b + 4$. Da 4 går op i $a + b$, går 4 også op i $a' + b'$.

Opgave 11

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 5 + 5 + 5 - 1 - 1 - 1 + 1 = 13.$