Alternerende gruppe og gruppevirkninger.

For $\sigma \in S_n$ er $n(\sigma)$ antallet af par (inversioner) (i, j), hvor $1 \leq i < j \leq n$ og $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Fortegnet af σ er $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{n(\sigma)}$.

Proposition. sgn : $S_n \mapsto \{\pm 1\}$ er en homomorfi.

Kernen af sgn kaldes den alternerende gruppe, skrives A_n.

En cykel $(x_1\ x_2\ \ldots\ x_k)$ er indeholdt i A_n hvis og kun hvis k er ulige.

Et produkt af disjunkte cykler er indeholdt A_n hvis og kun hvis der er et lige antal cykler af lige længde.

Lad G være en gruppe og lad S være en mængde.

Vi siger G **virker på** S hvis der findes en funktion $\alpha : G \times S \mapsto S$ som opfylder $\alpha(e,s) = s$ og $\alpha(gh,s) = \alpha(g, \alpha(h,s))$, for alle $s \in S$ og $g, h \in G$.

Idet vi skriver $\alpha(g,s) = g \cdot s$, er betingelserne

1. $e \cdot s = s$ for alle $s \in S$ og

2. $(gh) \cdot s = g \cdot (h \cdot s)$.

For et fast $g \in G$ er $\alpha_g : S \mapsto S$ en bijektion.
Hvis S er endelig så er α_g altså en permutation.

Det er muligt at α_g og α_h er samme funktion hvis $g \neq h$.

Hvis $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ så $\phi : G \mapsto S_n$ som er givet ved $\phi(g) = \alpha_g$ en homomorfi.

Lad $N = \ker \phi$. Så er $\alpha_g = \alpha_h$ hvis og kun hvis g og h ligger i samme sideklasse af N.

Definition. Lad G virke på S.

- For $s \in S$ defineres banen gennem s som $G \cdot s = \{gs \mid g \in G\}$.

- Mængden af (forskellige) baner betegnes S/G.

- For $X \subseteq S$ defineres stabilisatoren af X som
  $G_X = \{g \in G \mid g \cdot x \in X \quad \text{for alle } x \in X\}$.
  Hvis $X = \{x\}$ så skrives $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.

- Mængden af fikspunkter betegnes
  $S^G = \{s \in S \mid g \cdot s = s, \quad \text{for alle} \quad g \in G\}$.

Proposition.

1. Stabilisatoren G_X er en undergruppe af G for alle $X \subseteq S$.

2. Banerne udgør en partition af S:
$x \in Gx$ og hvis $Gx \cap Gy \neq \emptyset$ så er $Gx = Gy$.

3. For $x \in S$ definerer $\tilde{f}(gG_x) = gx$ en veldefineret bijektion $\tilde{f} : G/G_x \mapsto Gx$.

Korollar.
Hvis G er endelig så er $|G| = |Gx| \cdot |G_x|$ for ethvert $x \in S$.