Gruppevirkninger, Burnsides lemma og konjugeringsklasser.

Korollar 2.10.7 Lad G virke på en endelig mængde S.
Lad $G \cdot x_1, \ldots, G \cdot x_k$ være de forskellige baner af S med mindst to elementer.
Så er

$$|S| = |S^G| + \sum_{i=1}^{k} |G/G_{x_i}|,$$

hvor S^G er mængden af fikspunkter under G's virkning, altså baner med ét element.

Burnsides lemma.
Lad en endelig gruppe G virke på en endelig mængde S.
Så kan antallet af baner under G's virkning bestemmes som

$$|S/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |S^g|,$$

hvor $S^g = \{x \in S \mid g \cdot x = x\}$.

Eksempel.
G virker på en mængde X (f.eks. kanterne i en regulær n-kant).
Lad C være en mængde af k farver.
Lad S være mængden af mulige farvninger $f : X \mapsto C$.
(I eksempel 2.10.9 inkluderes kun farvninger med lige mange sorte og hvide elementer i S.)
G virker på S ved $g \cdot f(t) = f(g(t))$.

Vi kan ikke se forskel på to farvninger f_1 og f_2 hvis der findes $g \in G$ så $g \cdot f_1 = f_2$.
Lad os sige at f_1 og f_2 da er ækvivalente. (Dette giver en ækvivalensrelation.)

Antallet af ikke-ækvivalente farvninger (eller ækvivalensklasser af farvninger) er da lig med antal baner under G's virkning på S, som bestemmes ved hjælp af Burnsides lemma.

Lad $g \in G$.
g som permutation af X kan skrives produkt af disjunkte cykler $g = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_r$, hvor cykler af længde 1 er medtaget.
Hvis $g \cdot f = f$ hvor $g \in G, f \in S$, så tildeler f samme farve til hvert element i en cykel σ_i. Antal farvninger f hvor $g \cdot f = f$ (altså $f \in S^g$) er k^r, idet hver af de r cykler uafhængigt af hinanden kan tildeles en af de k farver (hvor r afhænger af g).

Altså

$$|S/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} k^{\text{antal cykler af } g \text{ som permutation af } X}.$$

Cykel index
En permutation $g \in S_n$ siges at være af cykel-type $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_r$ hvis g er produkt af disjunkte cykler af længde hhv. $i_1, i_2, \ldots, i_r$, hvor $\sum i_r = n$, cykler af længde 1 inkluderes altså.

Cykel indexet af g defineres da som

$$\zeta_g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r},$$

hvor $x_1, \ldots, x_n$ er forskellige symboler (variable).

Vi ser at

$$k^{\text{antal cykler af } g \text{ som permutation af } X} = k^r = \zeta_g(k, \ldots, k).$$

Antal farvninger er altså

$$|S/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \zeta_g(k, \ldots, k).$$

Idet vi definerer cykel indexet af en undergruppe G af S_n som

$$\zeta_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \zeta_g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

får vi:

Sætning.
Lad en endelig gruppe G virke på en endelig mængde X.
Så er antallet af ikke-ækvivalente farvninger af elementerne i X med k farver:

$$\zeta_G(k, \ldots, k).$$

Konjugering. Lad G være en gruppe.
G virker på G ved konjugering: $g \cdot x = gxg^{-1}$.

En bane under denne virkning:

$$\{gxg^{-1} \mid g \in G\}$$

kaldes en konjugeringsklasse.

Mængden af fikspunkter under G's virkning:

$$\{x \in G \mid gxg^{-1} = x, \text{ for alle } g \in G\}$$

kaldes centeret af G og betegnes $Z(G)$ (Mængden af elementer der kommuterer med alle andre elementer.)

Stabilisatoren af en undergruppe H af G:

$$\{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

kaldes normalisatoren af H i G og betegnes $N_G(H)$.