

Lineær algebra - 22

Ortogonale matricer.

En $n \times n$ matrix $Q = [\mathbf{q}_1 \ \dots \ \mathbf{q}_n]$ siges at være ortogonal hvis $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n\}$ er ortonormal, altså hvis $Q^T Q = I_n$.

Hvis Q er en ortogonal matrix så er determinanten

$$\det Q = \pm 1.$$

Hvis P og Q er ortogonale matricer så er PQ en ortogonal matrix.

En $n \times n$ matrix Q er en ortogonal matrix hvis og kun hvis

$$\|Q\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|.$$

Q er altså ortogonal hvis og kun hvis Q bevarer norm (og dermed afstand).

Lad Q være en **ortogonal** 2×2 **matrix**.

Hvis $\det Q = 1$ så er $Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ for en vinkel θ .

Q er matricen for en rotation med vinklen θ .

Hvis $\det Q = -1$ så er $Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ for en vinkel θ .

Q har egenvektorer $\begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ med egenverdier henholdsvis 1 og -1 .

Q er matricen for en spejling om linien med retningsvektor $\begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$.

Denne linie er egenrum for Q med egenværddi 1.

Lad Q være en **ortogonal 3×3 matrix**.

Så er Q matricen for en rotation hvis og kun hvis $\det Q = 1$.

Hvis P og Q er matricer for rotationer i \mathbb{R}^3 så er P og Q ortogonal matricer med determinant 1.

Så er PQ også en ortogonal matrix med determinant 1 og derfor er PQ også matricen for en rotation.

En funktion $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ kaldes en **flytning** (rigid motion) hvis den bevarer afstand altså hvis

$$\|F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|,$$

for alle vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Lad $\mathbf{b} = F(\mathbf{0})$ og $T(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) - \mathbf{b}$. Så er T en lineær transformation og en flytning. Standardmatricen for T er så en ortogonal matrix.

F kan altså skrives som

$$F(\mathbf{v}) = Q\mathbf{v} + \mathbf{b},$$

hvor Q er en ortogonal matrix.

(I litteraturen stilles ofte et yderligere krav for at F kaldes en flytning: nemlig at $\det Q = 1$ således at der ikke indgår spejlinger.)