# Opgave 1

(a)
Vi ønsker en linie med ligning $y = \alpha \cdot x + \beta$.

$\alpha$ og $\beta$ skal være mindste kvadraters løsning til ligningssystemet $A \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$, hvor

$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$: og $b := \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9 \\ 1.1 \\ 1.5 \end{bmatrix}$:

Normalligningen $A^T \cdot A = A^T \cdot \boldsymbol{b}$ med tal: $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 7.6 \end{bmatrix}$ har løsning $\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.17 \\ 0.47 \end{bmatrix}$.

Liniens ligning $y = 0.47 \cdot x + 0.17$.

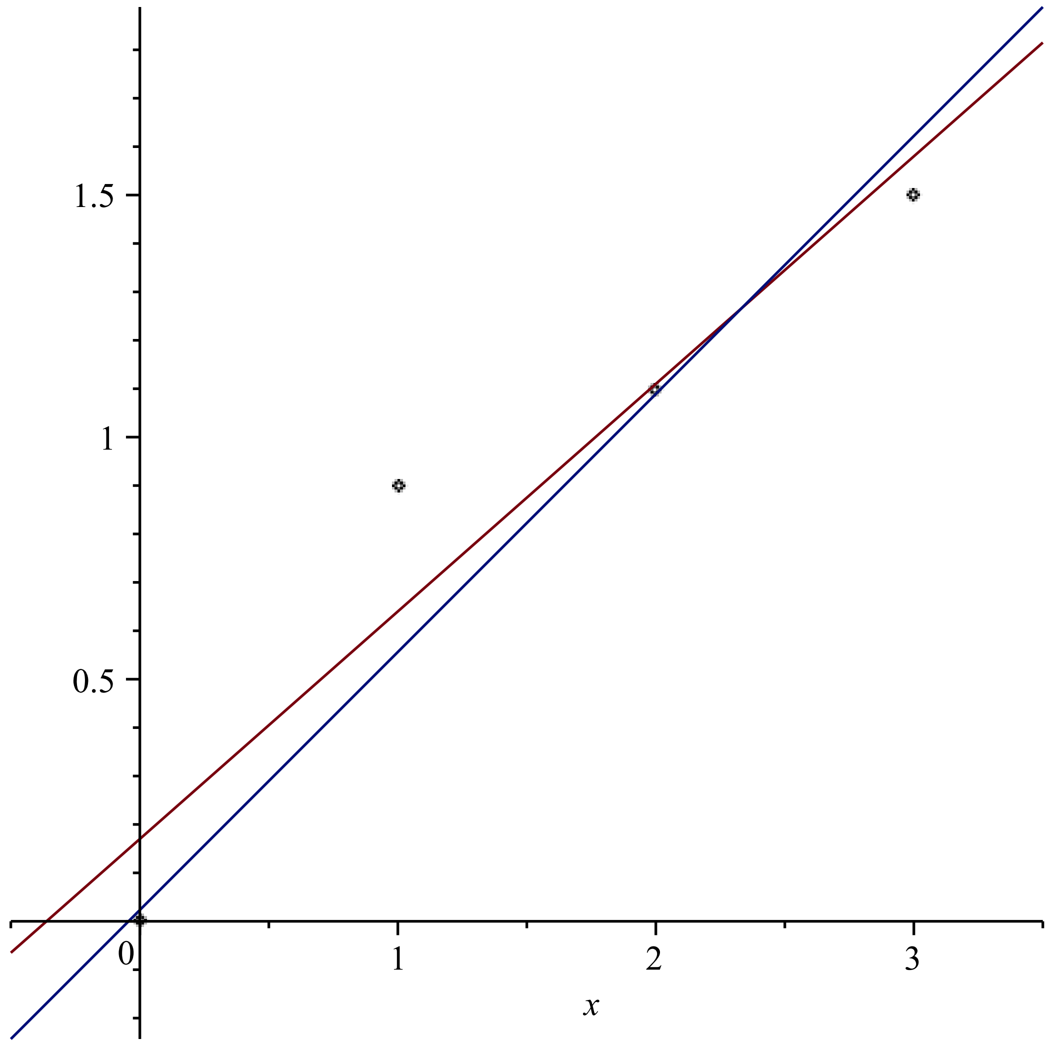
(b) Vægte: $C := \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$:

Normalligningen $A^T \cdot C \cdot A \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = A^T \cdot C \cdot \boldsymbol{b}$ med tal: $\begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 7.6 \end{bmatrix}$ har løsning

$\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0233 \\ 0.5329 \end{bmatrix}$.

Liniens ligning $y = 0.5329 \cdot x + 0.0233$.

(c) Linien fra (a) er brun. Linien fra (b) er blå.




# Opgave 2

## Opgave 2.1

Sæt $A := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, observationsvektoren $\boldsymbol{y} := \begin{bmatrix} 4-15 \\ 8 \\ 13-15 \\ 4 \\ 2 \\ 9-15 \end{bmatrix}$ og $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix}$.

Så er observationsligningen: $A \cdot \begin{bmatrix} h_{\mathrm{D}} \\ h_F \\ h_G \end{bmatrix} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}$.

Normalligningen $A^T \cdot A = A^T \cdot \boldsymbol{y}$ med tallene indsat: $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{\mathrm{D}} \\ h_F \\ h_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ -10 \\ 8 \end{bmatrix}$.

Løsning $\begin{bmatrix} h_{\mathrm{D}} \\ h_F \\ h_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10. \\ 2.25 \\ 6.75 \end{bmatrix}$.

## Opgave 2.3

(a)

Vægtmatricen $C := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

(b)

Normalligningen $A^T \cdot C \cdot A \cdot \begin{bmatrix} h_{\mathrm{D}} \\ h_F \\ h_G \end{bmatrix} = A^T \cdot C \cdot \boldsymbol{y}$ med tallene indsat

$$\begin{bmatrix} 0.7833 & -0.3333 & -0.2000 \\ -0.3333 & 0.7833 & -0.2500 \\ -0.200 & -0.2500 & 0.7833 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{\mathrm{D}} \\ h_F \\ h_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.8167 \\ -3.2667 \\ 2.6000 \end{bmatrix}$$

har løsning

$$\begin{bmatrix} h_D \\ h_F \\ h_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.0476 \\ 2.2083 \\ 6.5893 \end{bmatrix}.$$

(c)

Vi beregner nu $r = A \cdot \begin{bmatrix} h_D \\ h_F \\ h_G \end{bmatrix} - y = \begin{bmatrix} 0.95240 \\ -0.1607 \\ -0.2083 \\ 0.3810 \\ 1.4583 \\ -0.5893 \end{bmatrix}$ hvor vi har indsat løsningen fra (b) og $A$ og $y$ fra opgave 2.1.

Og vi beregner estimatet for variansfaktoren med brug af formlen fra Slides side 20:

$$\sigma_0^2 = \frac{r^T \cdot C \cdot r}{6-3} = 0.2738.$$

(d)

Covariansmatricen beregnes ved brug af formlen fra Slides, side 20:

$$\sigma_0^2 \cdot \left(A^T \cdot C \cdot A\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5389 & 0.3042 & 0.2347 \\ 0.3042 & 0.5609 & 0.2567 \\ 0.2347 & 0.2567 & 0.4914 \end{bmatrix}.$$

# Opgave 2.2

(a) Vi har $A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. I overensstemmelse fra Slides fra kursusgang 5 betegnes indgangene i denne matrix på følgende måde: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Vi skal finde Cholesky dekompositionen $U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$ som opfylder $A^T \cdot A = U^T \cdot U$.

Ifølge Slides fra kursusgang 5 har følgende formler: (jeg skriver her de eksakte løsninger, men brug gerne kommatal.)

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{3} \quad , \quad u_{12} = \frac{a_{12}}{u_{11}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{u_{11}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$u_{22} = \sqrt{a_{22} - u_{12}^2} = \sqrt{3 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} \quad , \quad u_{23} = \frac{(a_{23} - u_{12} \cdot u_{13})}{u_{22}} = \frac{\left(-1 - \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{8}{3}}} = -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{8}} =$$

$$-\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$u_{33} = \sqrt{a_{33} - u_{13}^2 - u_{23}^2} = \sqrt{3 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}} = \sqrt{2}$$

Altså $U = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{8}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.732 & -0.5774 & -0.5774 \\ 0. & 1.6330 & -0.8165 \\ 0. & 0. & 1.4142 \end{bmatrix}$

(b) Vi har fra opgave 2.1: $A^T \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 21 \\ -10 \\ 8 \end{bmatrix}$. Løsning til $U^T \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 21 \\ -10 \\ 8 \end{bmatrix}$ er $z = \begin{bmatrix} 12.1247 \\ -1.8366 \\ 9.5469 \end{bmatrix}$.

$Ux = \begin{bmatrix} 12.1247 \\ -1.8366 \\ 9.5469 \end{bmatrix}$ har løsning $x = \begin{bmatrix} 10.0012 \\ 2.2507 \\ 6.7507 \end{bmatrix}$. (Løsningen skal være den samme som i opgave 1.2. Forskellen skyldes afrundinger.)

(c) Ved af resultater fra opgave 2.1 får $\begin{bmatrix} A^T A & A^T y \\ (A^T y)^T & y^T y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 21 \\ -1 & 3 & -1 & -10 \\ -1 & -1 & 3 & 8 \\ 21 & -10 & 8 & 245 \end{bmatrix}$. Cholesky dekomposition af denne: $U_2 = \begin{bmatrix} 1.7321 & -0.5774 & -0.5774 & 12.1244 \\ 0. & 1.6330 & -0.8165 & -1.8371 \\ 0. & 0. & 1.4142 & 9.5459 \\ 0. & 0. & 0. & 1.8708 \end{bmatrix}$.

De første 3 rækker og søjler er U.

(d) Kvadratsum af residualer: $1.8708^2 = 3.4999$. Her bruges sidste tal i $U_2$.