Lineær algebra
Lektion 2

Afsnit 6.1

Lad $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ være to vektorer i $\mathbb{R}^n$.
Så defineres prikproduktet (det indre produkt eller skalarproduktet) som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

A en $m \times n$ matrix.
B en $n \times s$ matrix.

Tallene i produktet AB kan udregnes som prikprodukter:
Plads (i,j) i AB = (A's række i) $\cdot$ (B's søjle j).

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & 1 & * & * & * & * \\ * & 2 & * & * & * & * \\ * & 3 & * & * & * & * \\ * & 4 & * & * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & 70 & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$70 = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4.$

Regneregler:

- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

- $(\mathbf{u} + \mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$

- $(c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$ for et tal c.

- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} > 0$ med mindre $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. $\quad \mathbf{0}\cdot\mathbf{0} = 0$.

Længden af en vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ defineres til

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

$$||\mathbf{v}||^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

$$||c\mathbf{v}|| = \sqrt{(c\mathbf{v}) \cdot (c\mathbf{v})} = \sqrt{c^2 (\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v})} = |c| \sqrt{||\mathbf{v}||^2} = |c| \cdot ||\mathbf{v}||.$$

Normalisering af vektor $\mathbf{v}$:
Vektoren $\frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v}$ har længde 1 og peger i samme retning som $\mathbf{v}$.

Afstanden mellem to vektorer $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^n$ defineres som

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ||\mathbf{u} - \mathbf{v}|| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}.$$

To vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ siges at være ortogonale (vinkelrette) hvis $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

$\mathbf{0}$ er ortogonal på enhver vektor $\mathbf{v}$.

<u>Pythagoras:</u>
$\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er ortogonale hvis kun hvis $||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2$.

$$||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ||\mathbf{u}||^2+||\mathbf{v}||^2+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.$$

Underrum (afsnit 2.8)

H: en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$.

H er et underrum af $\mathbb{R}^n$ hvis

- $\mathbf{0} \in H$
- hvis $\mathbf{u} \in H$ og $\mathbf{v} \in H$ så $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$
- hvis $\mathbf{u} \in H$ og $c \in \mathbb{R}$ så $c\mathbf{u} \in H$

Lad W være et underrum af $\mathbb{R}^n$,
og lad $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$ være vektorer i W.

$\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ er en basis for W hvis

- span$\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\} = W$ og

- $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$ er lineært uafhængige
(Det betyder at ligningen

$$x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \ldots + x_p\mathbf{b}_p = \mathbf{0}$$

kun har løsningen $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$.)

Dimensionen, dim W, er antallet af vektorer i en basis.

Eksempler på underrum:

1. Hvis $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \in \mathbb{R}^n$ så er

$$\text{span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\} = \{c_1\mathbf{u}_1, \ldots, c_m\mathbf{u}_m \mid c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}\}$$

(mængden af alle linearkombination af $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$).
span$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ er et underrum af $\mathbb{R}^n$.

2. Hvis $A = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_m]$ er en $n \times m$ matrix så er

$$\text{Col } A = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$$

(søjlerummet af A)
et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Col A er mængden af vektorer på formen $A\mathbf{x}$ hvor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.

3. Hvis A er en $n \times m$ matrix så er

$$\text{Nul } A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

(nulrummet for A) et underrum af $\mathbb{R}^m$.

4. Hvis $A = \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{a}_1 & \dots \\ \dots & \mathbf{a}_2 & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & \mathbf{a}_m & \dots \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_m]^T$ er en $m \times n$ matrix så er

Row $A =$ Col A^T et underrum af $\mathbb{R}^n$.

(Row A er mængden af alle linear kombinationer af A's rækkevektorer.)

Det kaldes rækkerummet for A.

5. Hvis W er et underrum af $\mathbb{R}^n$ så lad L være mængden af vektorer i $\mathbb{R}^n$ der er ortogonale på enhver vektor i W.

Så er L et underrum af $\mathbb{R}^n$.
L kaldes det ortogonale komplement af W, skrives $L = W^\perp$.

For et underrum W af $\mathbb{R}^n$:

$$(W^\perp)^\perp = W.$$

$$\text{dim } W + \text{dim } W^\perp = n$$

De fire fundamentale underrum for matricen A er Col A, Row A, Nul A og Nul A^T.

Sammenhæng mellem de fire fundamentale underrum:

$$(\text{Row } A)^\perp = \text{Nul } A$$

$$(\text{Col } A)^\perp = (\text{Row } A^T)^\perp = \text{Nul } A^T$$

Afsnit 6.3

W: et underrum af $\mathbb{R}^n$
$\mathbf{y}$: en vektor i $\mathbb{R}^n$

Så findes der entydige vektorer $\hat{\mathbf{y}}$ og $\mathbf{z}$ så

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$$

$$\hat{\mathbf{y}} \in W$$

$$\mathbf{z} \in W^{\perp}$$

Hvis $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ er en ortogonal basis for W
(altså: $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ er en basis for W
og $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ for alle $i \neq j$)
så er

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \ldots + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p$$

og

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}.$$

$\hat{\mathbf{y}}$ kaldes den ortogonale projektion af $\mathbf{y}$ på W.

$\hat{\mathbf{y}}$ er den vektor i i W der er nærmest $\mathbf{y}$:
For alle $\mathbf{v} \in W$, $\mathbf{v} \neq \hat{\mathbf{y}}$ er $\text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) > \text{dist}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}})$.