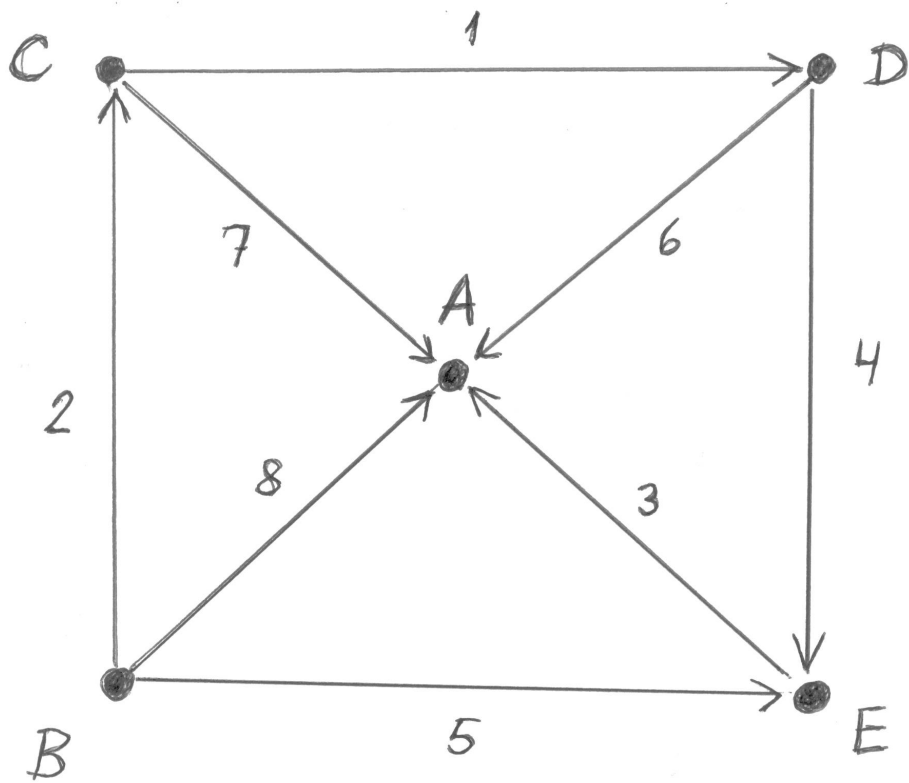


Lineær algebra
Lektion 3



Afsnit 6.5

Vi skal finde \mathbf{x} der (næsten) er løsning til ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

En mindste kvadraters løsning er en vektor $\hat{\mathbf{x}}$ som opfylder

$$\text{dist}(\mathbf{b}, A\hat{\mathbf{x}}) \leq \text{dist}(\mathbf{b}, A\mathbf{x})$$

for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$\|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$$

Hvis $\hat{\mathbf{x}}$ er en løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ så er $\hat{\mathbf{x}}$ også en mindste kvadraters løsning.

Hvis $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har en løsning så er $\mathbf{x} \notin \text{Col } A$.

Lad $\hat{\mathbf{b}}$ den ortogonale projektion af \mathbf{b} på underrummet $\text{Col } A$.
Så er

$$\text{dist}(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{b}}) \leq \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

for enhver vektor $\mathbf{c} \in \text{Col } A$.

Hvis $\hat{\mathbf{x}}$ er løsning til $A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$ så er

$$\text{dist}(\mathbf{b}, A\hat{\mathbf{x}}) = \text{dist}(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{b}}) \leq \text{dist}(\mathbf{b}, A\mathbf{x})$$

for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$. $\hat{\mathbf{x}}$ er altså en mindste kvadraters løsning.

Da $\hat{\mathbf{b}}$ er ortogonal projektionen af \mathbf{b} på $\text{Col } A$ er

$$\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}} \in (\text{Col } A)^\perp.$$

Altså: $\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}$ er ortogonal på søjlerne i $A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n]$.

Derfor er

$$A^T(\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{a}_1 & \dots \\ \dots & \mathbf{a}_2 & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & \mathbf{a}_m & \dots \end{bmatrix} (\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Hvis $\hat{\mathbf{x}}$ er en mindste kvadraters løsning så har vi altså:

$$A^T(\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}.$$

$$A^T\mathbf{b} - A^T A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}.$$

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}.$$

Normalligningen for $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}.$$

$\hat{\mathbf{x}}$ er en mindste kvadraters løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

hvis og kun hvis

$\hat{\mathbf{x}}$ er løsning til normalligningen $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

Hvis søjlerne i A er lineært uafhængige så har $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$ en entydig løsning.

Hvis søjlerne i A er lineært afhængige så er der frie variable og dermed uendeligt mange løsninger til $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$.

Dette uddybes på næste side.

Hvis søjlerne i A er lineært uafhængige så er $A^T A$ invertibel og normalligningen

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$$

har en entydig løsning:

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}.$$

Der er så altså en entydig mindste kvadraters løsning.

Hvis søjlerne i A er lineært afhængige så er $A^T A$ ikke invertibel.

Afstanden mellem to punkter har en (ukendt) værdi x .

Vi foretager en måling af afstanden og finder værdien b_1 .

Vi har så $x = b_1 + \hat{r}_1$, hvor \hat{r}_1 angiver en fejl i målingen.

Vi gentager målingen ind til vi har n målinger:

$$x = b_1 + \hat{r}_1$$

$$x = b_2 + \hat{r}_2$$

⋮

$$x = b_n + \hat{r}_n$$

Vi ønsker at bestemme x så $\hat{r}_1^2 + \dots + \hat{r}_n^2$ er så lille som muligt.

Vi skal altså finde en mindste kvadraters løsning til ligningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} .$$

Vi anvender teorien med

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} .$$

Vi udregner

$$A^T A = n$$

$$A^T \mathbf{b} = b_1 + \dots + b_n$$

Normalligningen er altså

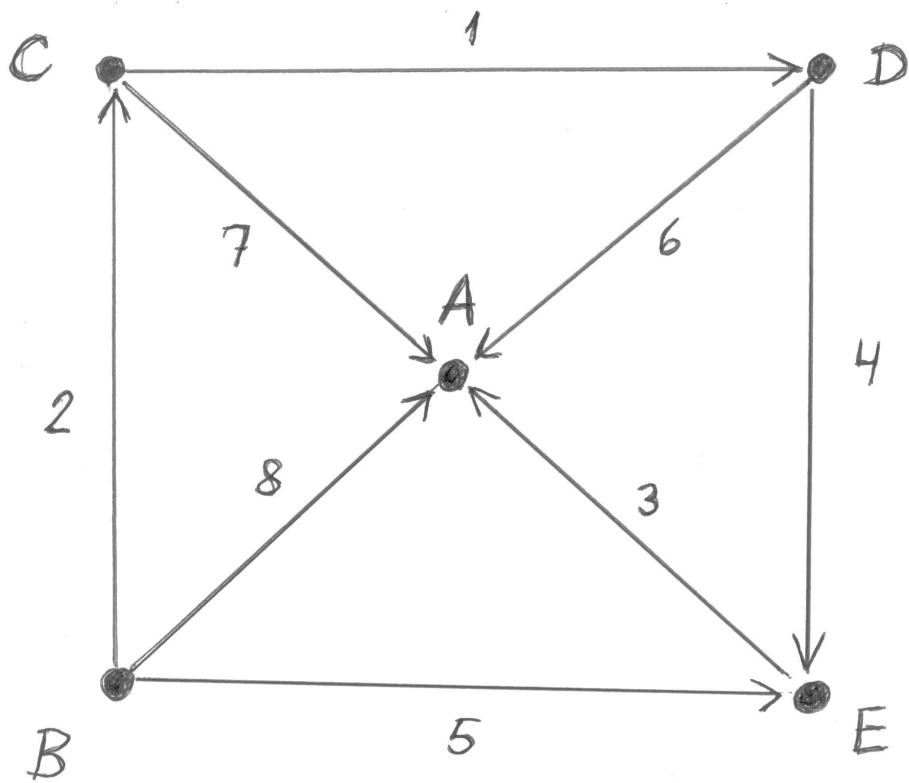
$$nx = b_1 + \dots + b_n.$$

Mindste kvadraters løsningen er

$$\hat{x} = \frac{b_1 + \dots + b_n}{n}.$$

Mellem fem punkter A, B, C, D, E er der målt følgende højdeforskelle:

Fra punkt	Til punkt	Højdeforskel
B	A	8
B	C	2
B	E	5
C	A	7
C	D	1
D	A	6
D	E	4
E	A	3



Højderne for de fem punkter er h_A, h_B, h_C, h_D, h_E .

Observationsligninger:

$$h_A - h_B = 8 + \hat{r}_1$$

$$h_C - h_B = 2 + \hat{r}_2$$

$$h_E - h_B = 5 + \hat{r}_3$$

$$h_A - h_C = 7 + \hat{r}_4$$

$$h_D - h_C = 1 + \hat{r}_5$$

$$h_A - h_D = 6 + \hat{r}_6$$

$$h_E - h_D = 4 + \hat{r}_7$$

$$h_A - h_E = 3 + \hat{r}_8$$

På matrixform:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_A \\ h_B \\ h_C \\ h_D \\ h_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \hat{r}_3 \\ \hat{r}_4 \\ \hat{r}_5 \\ \hat{r}_6 \\ \hat{r}_7 \\ \hat{r}_8 \end{bmatrix}$$

Sæt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

og find mindste kvadraters løsning til

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Udregn

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

og

$$A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ -15 \\ -6 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Udvidet koefficientmatrix for normalligningen $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 24 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & -15 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & -9 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{14}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{27}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindste kvadraters løsninger:

$$\begin{bmatrix} h_A \\ h_B \\ h_C \\ h_D \\ h_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} + t \\ -\frac{27}{5} + t \\ -4 + t \\ -\frac{17}{5} + t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8 + t \\ -5.4 + t \\ -4 + t \\ -3.4 + t \\ t \end{bmatrix},$$

hvor t er en fri variabel.

Antag nu at E et fikspunkt med højde 10. Vi kan så erstatte h_E med 10 i ligningerne.

Observationsligninger:

$$h_A - h_B = 8 + \hat{r}_1$$

$$h_C - h_B = 2 + \hat{r}_2$$

$$-h_B = -5 + \hat{r}_3$$

$$h_A - h_C = 7 + \hat{r}_4$$

$$h_D - h_C = 1 + \hat{r}_5$$

$$h_A - h_D = 6 + \hat{r}_6$$

$$-h_D = -6 + \hat{r}_7$$

$$h_A = 13 + \hat{r}_8$$

Sæt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -5 \\ 7 \\ 1 \\ 6 \\ -6 \\ 13 \end{bmatrix},$$

og find mindste kvadraters løsning til

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Søjlerne i A er nu lineært uafhængige. Der er derfor en entydig mindste kvadraters løsning:

$$\begin{bmatrix} h_A \\ h_B \\ h_C \\ h_D \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{64}{5} \\ \frac{23}{5} \\ 6 \\ \frac{33}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.8 \\ 4.6 \\ 6 \\ 6.6 \end{bmatrix}$$