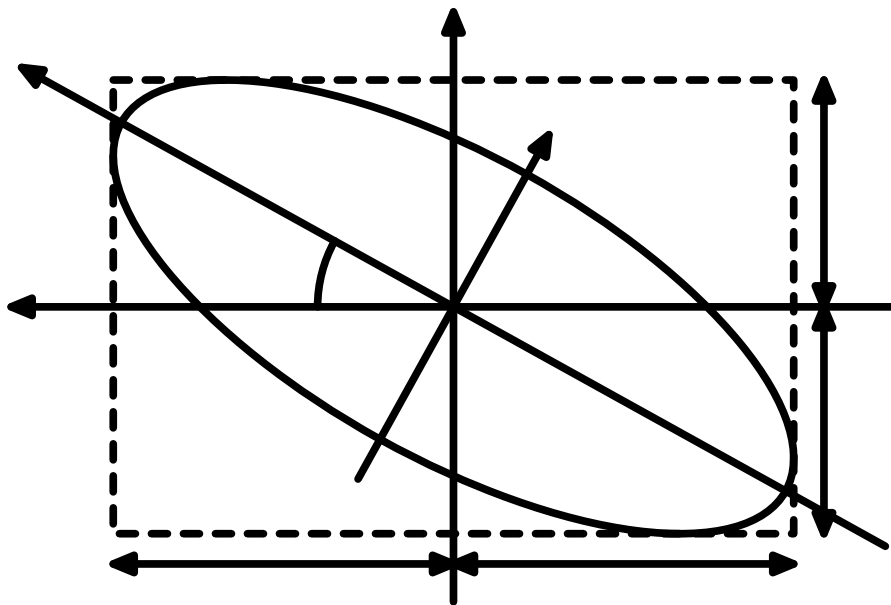


Udjævning



Peter Cederholm

Udjævning

Peter Cederholm

Udjævning.
2. udgave, 1. revision, 2000.

Forord

Disse noter er skrevet i forbindelse med afholdelse af udjævningskurser for landinspektørstuderende på studiets 5. og 8. semester. Noterne dækker ikke alt det stof, der gennemgås i kurserne, hvorfor anden litteratur må studeres sideløbende. Noterne er udarbejdet på baggrund af materialet i litteraturlisten.

På landinspektørstudiet bruges i øjeblikket udjævningsprogrammet Turbo-Net. Et kapitel omhandler derfor brug af dette program. De øvrige kapitler er af generel karakter. Som supplement til noterne findes en diskette med blandt andet de Turbo-Net filer, der gennemgås i noterne.

Udjævnningsteorien er løbende suppleret med eksempler, der anvender teorien. Eksemplerne bør derfor ved læsningen tillægges lige så stor vægt som den omgivende tekst. Tegnet $\diamond$ angiver afslutningen på et eksempel. Eksemplerne er i høj grad beregnet med Matlab. En del Matlab filer findes på disketten. Noterne er suppleret med opgaver. Svar til disse er givet sidst i noterne.

En tak skal rettes til Karsten Jensen, Laboratoriet for Geoinformatik, AAU for at have kommenteret en del af noterne. Kommentarer, rettelser og ændringsforslag modtages gerne.

Torpet, september 2000

Peter Cedersholm

Indhold

1	Introduktion	1
2	Udjævning af lineære problemer	5
2.1	Mindste kvadraters princip	5
2.2	Observationsligninger	8
2.3	A priori varians	11
2.4	Normalligninger	15
2.4.1	Normalligninger for observationer med ens vægt . . .	15
2.4.2	Normalligninger for observationer med forskellig vægt	18
2.4.3	Generel udledning af normalligninger	21
2.5	Opgaver	23
3	Udjævning af ulineære problemer	25
3.1	Linearisering	25
3.2	Iterativ løsning	33
3.3	Opgaver	38
4	Vurdering af udjævning I	39
4.1	A posteriori variansfaktor	39
4.2	A posteriori varians	42
4.2.1	A posteriori varians for elementer	43
4.2.2	A posteriori varians for residualer	46
4.3	Normaliserede residualer	48
4.4	Konfidensellipser	49
4.4.1	Relative konfidensellipser	58
4.5	Testnet	59
4.6	Opgaver	60
5	Turbo-Net	61
5.1	Data	61
5.2	A priori spredning	63
5.2.1	Horisontalvinkler	63
5.2.2	Zenitdistancer	64
5.2.3	Skråafstande	64

5.2.4	Geometrisk nivellement	64
5.2.5	Koordinatobservationer	65
5.2.6	GPS	65
5.3	Udjævning	68
5.3.1	Fri udjævning af GPS vektorer	70
5.3.2	Fri udjævning af terrestriske observationer	72
5.3.3	Fri udjævning af alle observationer	75
5.3.4	Fri udjævning af alle observationer	77
5.3.5	Fastholdt udjævning af GPS vektorer	78
5.3.6	Fastholdt udjævning af terrestriske observationer	80
5.3.7	Fastholdt udjævning af alle observationer	82
6	Vurdering af udjævning II	86
6.1	Global test	87
6.1.1	Turbo-Net	94
6.2	Data Snooping	95
6.3	Redundanstal	103
6.4	Variansestimation	110
6.5	Pålidelighed	115
6.5.1	Intern pålidelighed	116
6.5.2	Ekstern pålidelighed	120
6.6	A priori brug af tests	124
6.7	Skematisk fremstilling af testforløb	124
6.8	Opgaver	127
A	Testteori	129
B	Kritiske værdier, χ^2 fordeling	135
C	Svar til opgaver	137
	Litteratur	144

Kapitel 1

Introduktion

Landmålingsobservationer såsom afstande og retninger observeres ikke kun fordi de selv er af interesse, men fordi de ofte er nødvendige for at bestemme andre størrelser. For eksempel kan observation af retninger og afstande danne grundlag for bestemmelsen af arealet af den figur, observationerne indgår i. Arealet er således beregnet udfra de observerede størrelser. Det er ofte koordinater, der ønskes afledt af observationerne.

De sammenhænge, der sammenknytter observationerne og de ønskede størrelser betegnes en matematisk *model*. Modellen er et teoretisk system, der beskriver en fysisk situation. En sådan beskrivelse er ikke nødvendigvis komplet men omhandler kun de egenskaber, der søges. Den matematiske modellen opsplittes i to dele: en funktionel model og en stokastisk model.

I landmåling beskriver den *funktionelle model* de geometriske sammenhænge, der forbinder observationerne og de søgte størrelser. Selvom man måske ikke eksplicit tænker på den model, der knytter sig til et specifikt problem, anvendes modellen når observationer bearbejdes til at give det ønskede resultat.

Observationer er altid behæftet med tilfældige fejl. Fra et praktisk synspunkt er det vanskeligt at skaffe sig kendskab til de statistiske egenskaber, der knyttet sig til observationer. En metode til at få kendskab til disse egenskaber er at foretage gentagne målinger for på den måde at aflede egenskaberne, men dette er ofte en krævende proces. En anden metode, der ofte anvendes, er at tillægge observationerne statistiske egenskaber, man kender fra tilsvarende observationer foretaget tidligere under lignende forhold. Et eksempel herpå er ved retningsobservationer at anvende den retningsspredning, instrumentfabrikanten angiver i instrumentets manual. Summen af de statistiske antagelser, der knyttet sig til observationerne og de søgte størrelser kaldes den *stokastiske model*.

Som eksempel på en funktional model ses på størrelsen og formen af en trekant. Fra den plane geometri ved vi, at

1. formen af en trekant kan entydigt bestemmes af to variable. Disse kan være to vilkårlige vinkler i trekanten.
2. størrelsen og formen af en trekant kan entydigt bestemmes af tre variable, hvoraf mindst en må beskrive en sidelængde i trekanten.
3. hvis ydeligere trekantens placering og orientering ønskes bestemt, kræves ydeligere tre variable; ialt seks variable.

De tre beskrivelser af trekanten er tre modeller, der bestemmer trekanten på forskellig vis. Det antal variable, der er nødvendig for akkurat at bestemme en model kaldes n . De n variable, der er nødvendige for at bestemme modellen kaldes modellens *elementer*. I de tre modeller for trekanten er n henholdsvis $n = 2$, $n = 3$ og $n = 6$. Elementerne må vælges, så de er *uafhængige*. Hvis trekantens størrelse og form ønskes bestemt, kan de tre vinkler i trekanten ikke vælges som elementer, da den tredje vinkel kan bestemmes ud fra de to øvrige. Endvidere kan størrelsen ikke bestemmes ud fra tre vinkler alene; der må tilføjes en sidelængde. Formålet med udjævning er at bestemme de bedst mulige værdier for elementerne. Udjævningen kaldes af denne grund en *elementudjævning*. Inden en udjævning gennemføres må elementerne derfor *vælges*. Afhængigt af hvad vi ønsker at bestemmes gennem udjævningen, må der vælges forskellige elementer; jævnfør eksemplerne med trekanten. Når elementerne vælges skal følgende betingelser påfyldes:

1. Antallet af elementer skal akkurat kunne bestemme modellen; der må hverken være for mange eller for få elementer.
2. Elementerne skal være uafhængige.

Hvis ikke observationerne er i stand til at bestemme de n elementer, er modellen ikke bestemt. Når observationerne akkurat kan bestemme de n elementer er modellen entydigt bestemt. Hvis en af observationerne er behæftet med en grov fejl, er der imidlertid ingen mulighed for at opdage dette. Der er derfor altid god praksis at foretage flere observationer end det absolut minimum, der er nødvendigt for at bestemme modellen. Antallet af observationer kaldes m . Selve observationerne benævnes b .

1. Hvis $m < n$ er modellen ikke bestemt.
2. Hvis $m = n$ er modellen akkurat bestemt.
3. Hvis $m > n$ er modellen overbestemt.

I tilfældet hvor $m > n$ er modellen overbestemt, og en udjævning er nødvendig for at bestemme de n elementer entydigt. Hver observation, der overstiger det nødvendige antal observationer n , udgør en overbestemmelse. Antallet af overbestemmelser kaldes u ; $u = m - n$. Antallet af overbestemmelser er altså forskellen mellem antallet af observationer og antallet af elementer. Antallet af overbestemmelser kaldes også antallet af frihedsgrader. Overbestemmelserne er kun meningsfulde, hvis observationerne er i stand til at bestemme de n elementer, der beskriver modellen. Som nævnt tidligere kan for eksempel størrelse og form af en trekant ikke bestemmes udfra tre vinkler. Hvis vinklerne måles to gange, så der ialt er seks vinkler, er der tilsyneladende tre overbestemmelser. Modellen kan dog stadig ikke bestemmes, og i det tilfælde giver det derfor ingen mening at tale om overbestemmelser.

Når overbestemmelser er til stede, opstår en interessant situation. For hver anvendelig delmængde på n observationer ud af de m tilgængelige observationer fås formodentlig en forskellig bestemmelse af modellen. Hvis for eksempel en sidelængde og de tre vinkler i en trekant er målt, kan trekantens størrelse og form bestemmes på tre måder. For hver af disse kombinationer vil trekanten have forskellig størrelse og form. Dette skyldes, at observationerne er påvirket af tilfældige fejl. De m observationer opfylder altså ikke til sammen modellen.

Denne uoverensstemmelse mellem observationer og model løses ved at udskifte observationerne b med et sæt *korrigerede* observationer $\hat{b}$, således det nye sæt observationer $\hat{b}$ bestemmer modellen eksakt. I trekanteksemplet vil det nye sæt estimer for sidelængden og de tre vinkler give præcis den samme trekant ligegyldigt hvordan observationerne kombineres. Alle observationer er nu konsistente med modellen. Dette angiver, at den funktionelle model anses for at være observationerne overlegen. Vi ved, at en sidelængde og to vinkler kan bestemme trekantens størrelse og form, og derfor må observationerne tilpasses dette krav.

Hver korrigeret observation $\hat{b}_i$ bestemmes altså udfra den observerede størrelse b_i og en *korrektur* $\hat{r}_i$, det vil sige

$$\hat{b}_i = b_i + \hat{r}_i. \quad (1.1)$$

Korrektionen $\hat{r}_i$ kaldes *residualen*. Residualerne er ukendte og må bestemmes før $\hat{b}_i$ kan udregnes. På grund af overbestemmelserne er der et uendeligt antal mulige residualer, der vil give et tilsvarende antal korrigerede observationer, der alle opfylder modellen. Blandt alle disse muligheder, er der et sæt residualer, der give den optimale løsning. For at finde denne løsning må endnu et *kriterium* opfyldes. Der er flere mulige kriterier, men det der oftest bruges i landmåling er *mindste kvadraters princip*. Processen med at finde

det nye sæt estimer $\hat{b}$ i overensstemmelse med mindste kvadraters princip kaldes *udjævning*. Mindste kvadraters udjævning bruges flittigt, ikke kun i landmåling, fotogrammetri og geodæsi, men også i mange andre naturvidenskaber.

I de følgende kapitler vises, hvordan mindste kvadraters princip anvendes i forskellige sammenhænge i landmålingen.

Kapitel 2

Udjævning af lineære problemer

2.1 Mindste kvadraters princip

Når et problem er overbestemt, er en udjævning nødvendig for at finde en entydig løsning på problemet. Hvis vi i øjeblikket antager, at alle observationer er *uafhængige* og har *ens vægt*, er mindste kvadraters princip baseret på følgende kriterium: *Summen af de kvadrerede residualer skal være minimum*, det vil sige

$$\phi = \hat{r}_1^2 + \hat{r}_2^2 + \cdots + \hat{r}_m^2 = \sum_{i=1}^m \hat{r}_i^2 \rightarrow \text{minimum}. \quad (2.1)$$

I (2.1) benævnes ϕ *vægtfunktionen*. Når observationerne er *uafhængige* og har *forskellig vægt* lyder mindste kvadraters princip: *Summen af de kvadrerede og vægtede residualer skal være minimum*

$$\phi = c_1 \hat{r}_1^2 + c_2 \hat{r}_2^2 + \cdots + c_m \hat{r}_m^2 = \sum_{i=1}^m c_i \hat{r}_i^2 \rightarrow \text{minimum}, \quad (2.2)$$

hvor $c_1, c_2, \dots, c_m$ er vægtene svarende til observationerne $b_1, b_2, \dots, b_m$. Efter endt udjævning skal to betingelser være opfyldt:

1. Modellen skal opfyldes perfekt af de korrigerede observationer $\hat{b}$, jævnfør kapitel 1. Grunden til der foretages en udjævning er jo, at der er for mange observationer til entydigt at bestemme modellen.
2. Mindste kvadraters princip skal være opfyldt.

Gennem resten af kapitlet vises ved hjælp af eksempler hvordan princippet bruges i praksis. Eksemplerne bliver gradvist mere komplicerede for til sidst i kapitlet at munde ud i en generel udledning af mindste kvadraters princip.

Eksempel 2.1 Ved hjælp af mindste kvadraters princip ønskes en afstand x bestemt udfra målinger af denne. Da modellen kun involverer et element (selve afstanden), er kun en observation nødvendig for entydigt at bestemme afstanden, det vil sige $n = 1$. Antag at vi har to målinger, $b_1 = 15.12$ og $b_2 = 15.14$. I dette tilfælde er $m = 2$ og der er en overbestemmelse, da $u = m - n = 2 - 1 = 1$. Den endelige værdi for afstanden $\hat{x}$ kan findes fra observationerne som

$$\hat{x} = b_1 + \hat{r}_1 = \hat{b}_1 \quad (2.3)$$

$$\hat{x} = b_2 + \hat{r}_2 = \hat{b}_2. \quad (2.4)$$

Der er mange mulige værdier for $\hat{r}_1$ og $\hat{r}_2$, der opfylder disse ligninger. For eksempel kan vi have $\hat{r}_1 = 0$ og $\hat{r}_2 = -0.02$; eller $\hat{r}_1 = +0.01$ og $\hat{r}_2 = -0.01$; eller $\hat{r}_1 = +0.015$ og $\hat{r}_2 = -0.005$. Alle disse værdier for $\hat{r}_1$ og $\hat{r}_2$ opfylder modellen som udtrykt ved ligning (2.3) og (2.4). Mindste kvadraters løsning er den, der sikrer, at $\phi = (\hat{r}_1^2 + \hat{r}_2^2)$ er et minimum. For de tre sæt residualer er de tilsvarende summer af de kvadrerede residualer

$$\phi_1 = (0)^2 + (-0.02)^2 = 4 \times 10^{-4}$$

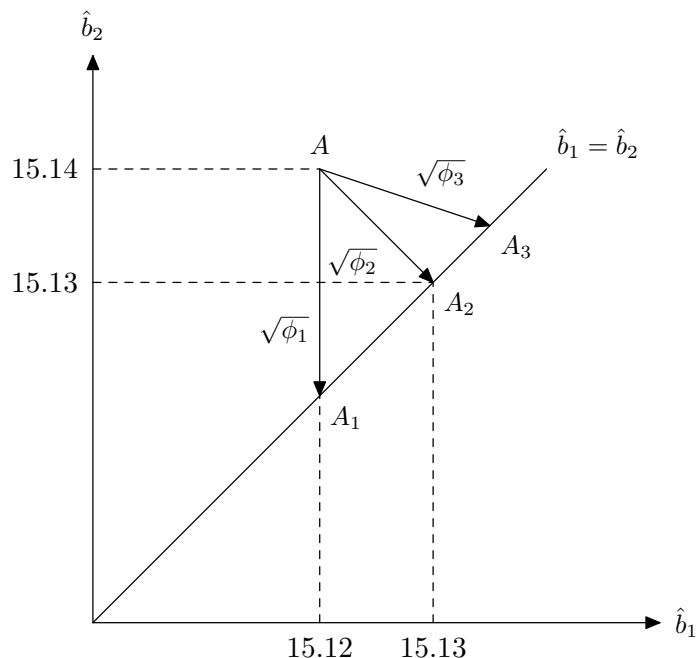
$$\phi_2 = (+0.01)^2 + (-0.01)^2 = 2 \times 10^{-4}$$

$$\phi_3 = (+0.015)^2 + (-0.005)^2 = 2.5 \times 10^{-4}.$$

Det er tydeligt, at ϕ_2 er den mindste af de tre værdier, men det egentlige spørgsmål er, om det er det absolutte minimum når alle mulige kombinationer af residualer tages i betragtning. Svaret illustreres i figur 2.1, der samtidig demonstrerer mindste kvadraters princip. De to udjævnede observationer $\hat{b}_1$ og $\hat{b}_2$ er knyttet til hinanden ved

$$\hat{b}_1 = \hat{b}_2, \quad (2.5)$$

hvilket findes ved at trække ligning (2.3) og (2.4) fra hinanden. Hvis førsteaksen i figuren repræsenterer $\hat{b}_1$ og andenaksen repræsenterer $\hat{b}_2$, vil (2.5) beskrive en ret linie med hældningskoefficienten 1, som vist i figuren.



Figur 2.1: Illustration af mindste kvadraters princip.

De to observationer $b_1 = 15.12$ og $b_2 = 15.14$ definerer et punkt, der ligger over linien fordi $b_1 < b_2$. Linien $\hat{b}_1 = \hat{b}_2$ repræsenterer den betingelse, der skal være opfyldt mellem $\hat{b}_1$ og $\hat{b}_2$. Når denne betingelse er opfyldt, er den underliggende model bestemt. Hvis punkt A udskiftes med et andet punkt, der ligger på linien, vil en udjævning derfor være gennemført. Det er muligt at bestemme uendeligt mange punkter på linien, hvoraf de tre, der er markeret med A_1 , A_2 og A_3 , svarer til de tre beregnede værdier ϕ_1 , ϕ_2 og ϕ_3 . Af alle muligheder vælger mindste kvadraters princip punkt A_2 , så afstanden $|AA_2|$ er kortest mulig, det vil sige *minimum*. Denne betingelse er opfyldt for A_2 , da linien AA_2 er vinkelret på linien $\hat{b}_1 = \hat{b}_2$. Dette punkt opfylder også den intuitive betingelse, at de nye estimater for observationerne $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$ skal afvige så lidt som muligt fra de givne observationer b_1 , b_2 . Da linien AA_2 er vinkelret på linie $\hat{b}_1 = \hat{b}_2$, er $\hat{r}_1$ og $\hat{r}_2$ lige store men med modsat fortegn. De udjævnede observationer ender således med at være ens; $\hat{b}_1 = \hat{b}_2 = 15.13$. Det endelige estimat for afstanden er $\hat{x} = 15.13$, hvilket også intuitivt virker rigtigt, da den udjævnede værdi er middelværdien af observationerne, det vil sige

$$\hat{x} = \frac{15.12 + 15.14}{2} = 15.13.$$

Dette er det simpleste eksempel på, at når målinger af en størrelse er uafhængige og har ens vægt, er mindste kvadraters estimat af størrelsen lig med middelværdien af målingerne. $\diamond$

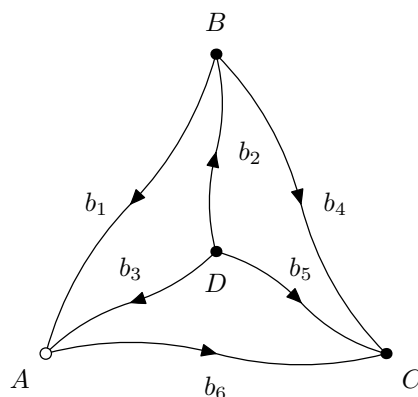
2.2 Observationsligninger

Når modellen i et udjævningsproblem er fastlagt er første skridt at opstille observationsligningerne. Observationsligninger udtrykker sammenhængen mellem observationer og elementer. For hver observation opstilles en ligning, der udtrykker elementernes funktionelle sammenhæng med observationen. Observationsligningerne har følgende karakteristika:

- Antallet af observationsligninger er det samme som antallet af observationer, m .
- Hver af de m observationsligninger må kun indeholde en observation.
- Observationsligningerne kan både indeholde observationer, elementer og konstanter.

Eksempel 2.2 Figur 2.2 viser et lille nivellementsnet, hvori A er et fikspunkt med højden 8.130 m. Følgende højdeforskelle er observeret i nettet

Fra punkt	Til punkt	Højdeforskel [m]
B	A	$b_1 = 1.207$
D	B	$b_2 = 1.115$
D	A	$b_3 = 2.305$
B	C	$b_4 = 2.097$
D	C	$b_5 = 3.203$
A	C	$b_6 = 0.906$



Figur 2.2: Nivellementsnet.

Koten i punkt A kaldes H_A , koten i B kaldes H_B og så videre. Observationerne antages at være uafhængige og af ens præcision. Udfra observationerne og koten i punkt A ønskes H_B , H_C og H_D bestemt. Som elementer i udjævningen vælges netop H_B , H_C og H_D . Antallet af elementer er derfor tre; $n = 3$. Der er seks observationer ($m = 6$), så der er tre overbestemmelser, $u = m - n = 6 - 3 = 3$. Hvis observationerne ikke er behæftet med fejl, er lukkesummerne i ringene 0. Dette er dog ikke tilfældet. For eksempel er der i ringen ABD en fejl på $(-1.207 - 1.115 + 2.305) = -0.017$. Der må derfor indføres seks residualer, $\hat{r}_1, \hat{r}_2, \dots, \hat{r}_6$, en for hver observation. Udfra tabellen og figur 2.2 opstilles nu de seks ligninger, der skal være opfyldt efter endt udjævning.

$$\hat{b}_1 = H_A - H_B$$

$$\hat{b}_2 = H_B - H_D$$

$$\hat{b}_3 = H_A - H_D$$

$$\hat{b}_4 = H_C - H_B$$

$$\hat{b}_5 = H_C - H_D$$

$$\hat{b}_6 = H_C - H_A.$$

Ved at indsætte residualerne i ligningerne ovenfor fås observationslignin-

gerne:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= H_A - H_B - \hat{r}_1 \\
 b_2 &= H_B - H_D - \hat{r}_2 \\
 b_3 &= H_A - H_D - \hat{r}_3 \\
 b_4 &= H_C - H_B - \hat{r}_4 \\
 b_5 &= H_C - H_D - \hat{r}_5 \\
 b_6 &= H_C - H_A - \hat{r}_6.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Observationsligningerne opfylder kravene, der blev stillet på side 8. Der er seks observationsligninger, der hver kun indeholder en observation. $\diamond$

Eksempel 2.3 Ligningssystemer løses mest hensigtsmæssigt af computeren, når disse er givet på matrixform. Observationsligningerne opstilles derfor endnu engang men nu på matrixform. Der tages udgangspunkt i ligningssystemet (2.6), der fuldt udskrevet ser således ud:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 1 \cdot H_A - 1 \cdot H_B + 0 \cdot H_C + 0 \cdot H_D - \hat{r}_1 \\
 b_2 &= 0 \cdot H_A + 1 \cdot H_B + 0 \cdot H_C - 1 \cdot H_D - \hat{r}_2 \\
 b_3 &= 1 \cdot H_A + 0 \cdot H_B + 0 \cdot H_C - 1 \cdot H_D - \hat{r}_3 \\
 b_4 &= 0 \cdot H_A - 1 \cdot H_B + 1 \cdot H_C + 0 \cdot H_D - \hat{r}_4 \\
 b_5 &= 0 \cdot H_A + 0 \cdot H_B + 1 \cdot H_C - 1 \cdot H_D - \hat{r}_5 \\
 b_6 &= -1 \cdot H_A + 0 \cdot H_B + 1 \cdot H_C + 0 \cdot H_D - \hat{r}_6.
 \end{aligned}$$

Højden i punkt A er kendt i forvejen. Derfor flyttes H_A over på venstre side af lighedstegnet, således venstre side af ligningerne indeholder målte og kendte størrelser, mens højre side indeholder de ukendte elementer (koter) og de ukendte residualer:

$$\begin{aligned}
 b_1 - H_A &= -1 \cdot H_B + 0 \cdot H_C + 0 \cdot H_D - \hat{r}_1 \\
 b_2 &= +1 \cdot H_B + 0 \cdot H_C - 1 \cdot H_D - \hat{r}_2 \\
 b_3 - H_A &= +0 \cdot H_B + 0 \cdot H_C - 1 \cdot H_D - \hat{r}_3 \\
 b_4 &= -1 \cdot H_B + 1 \cdot H_C + 0 \cdot H_D - \hat{r}_4 \\
 b_5 &= +0 \cdot H_B + 1 \cdot H_C - 1 \cdot H_D - \hat{r}_5 \\
 b_6 + H_A &= +0 \cdot H_B + 1 \cdot H_C + 0 \cdot H_D - \hat{r}_6.
 \end{aligned}$$

Ligningssystemet opstilles nu på matrixform. Observationerne og residualerne samles i to $m \times 1$ søjlevektorer

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 - H_A \\ b_2 \\ b_3 - H_A \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 + H_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.923 \\ 1.115 \\ -5.825 \\ 2.097 \\ 3.203 \\ 9.036 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \hat{r}_3 \\ \hat{r}_4 \\ \hat{r}_5 \\ \hat{r}_6 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterne til elementerne samles i en $m \times n$ *designmatrix* kaldet $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

og endelig samles elementerne i en $n \times 1$ søjlevektor

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \end{bmatrix}.$$

Observationsligningerne kan nu skrives som

$$\begin{bmatrix} -6.923 \\ 1.115 \\ -5.825 \\ 2.097 \\ 3.203 \\ 9.036 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \hat{r}_3 \\ \hat{r}_4 \\ \hat{r}_5 \\ \hat{r}_6 \end{bmatrix},$$

hvilket i matrixnotation svarer til

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.7)$$

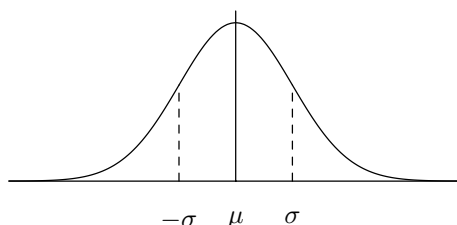
◇

2.3 A priori varians

Gentagne observationer af den samme størrelse resulterer altid i en vis variation. Dette skyldes grove fejl, systematiske fejl og tilfældige fejl. Det antages, at observationerne er fri for grove fejl og korrigeret for systematiske fejl. På grund af de tilfældige fejl vil observationerne stadig variere; det er ikke muligt at bestemme den *sande* værdi for en observeret størrelse udfra gentagne observationer. Observationernes *sande* værdier kan højst *estimeres*. På grund af fejlenes tilfældige karakter må observationerne betragtes som *stokastiske variable*.

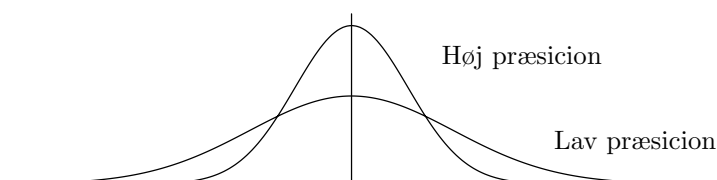
I landmåling antages, at observationerne er normalfordelte $N(\mu, \sigma^2)$. Tæthedsfunktionen for en normalfordelt observation er vist i figur 2.3. *Midelværdien* af observationen er μ . Når observationen ikke er påvirket af grove og systematiske fejl, antages μ for at være den *sande* værdi for observationen. *Spredningen* på observationen er σ , der er et mål for hvor ‘bred’ eller ‘spredt’

sandsynlighedsfunktionen er. Hvis en observation A har større variation end en observation B , har A en større spredning end B .



Figur 2.3: Normalfordeling.

Præcisionen af en observation bestemmes af hvor tæt gentagne observationer ligger på hinanden. Når observationerne ligger tæt sammen, har de en høj præcision; hvis de ligger spredt, har de en lav præcision. Præcisionen ses af formen af sandsynlighedsfunktionen. Jo smallere sandsynlighedsfunktion jo større præcision og vice versa. Spredningen σ er mål for observationens præcision. Jo højere præcision jo mindre spredning og omvendt.



Figur 2.4: Høj og lav præcision.

Nøjagtigheden af en observation bestemmes af hvor tæt observationen ligger på den sande værdi. Når observationen ikke er påvirket af systematiske fejl, kan spredningen også bruges som mål for nøjagtigheden. Hvis spredningen skal bruges som et mål for nøjagtighed, er det derfor vigtigt, at systematiske fejl er reduceres til et ubetydeligt niveau.

Middelværdien for observationen b er givet ved

$$\mu_b = E[b],$$

hvor $E[b]$ også kaldes forventningen til b . Variansen for b er givet ved

$$\sigma_b^2 = E[(b - \mu_b)^2]$$

Variansen er spredningen kvadreret. Variansen er således også mål for observationens præcision. En observation af stor præcision har derfor en lille varians og vice versa. Variansen er omvendt proportional med præcisionen. Derfor anvendes ofte et andet mål for præcisionen, der er ligefrem proportional med denne. Dette mål kaldes observationens vægt. En observation med en stor vægt har således en stor præcision og omvendt. Vægten c_i for en enkelt observation er defineret som den inverse af observationens varians σ_i^2 , det vil sige

$$c_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}, \quad (2.8)$$

hvor σ_0^2 er en proportionalitetsfaktor, der kaldes *variansfaktoren*. Ligning (2.8) kaldes *vægtrelationen*. Hvis en observation har vægten 1, er observationens varians og σ_0^2 ifølge (2.8) lige store. Variansfaktoren σ_0^2 er derfor variansen af en observation med vægten 1. Hvis en observation har en varians større end σ_0^2 , er observationen altså bestemt med mindre præcision end observationen, der svarer til σ_0^2 . Vægten bliver i dette tilfælde mindre end 1 på grund af den lavere præcision. Omvendt, hvis en observation har en varians, der er mindre end σ_0^2 , bliver vægten større end 1. Dette er rimeligt, da observationen har en større præcision end observationen, der svarer til σ_0^2 . Kvadratroden af variansfaktoren kaldes *spredningen på vægtenheden* σ_0 .

Hidtil er hver observation behandlet for sig. Hvis to (eller flere) observationer b_1 , b_2 er indbyrdes forbundet, det kan for eksempel være Y og X koordinaterne til et punkt, må ydeligere *korrelationen* mellem dem beskrives. Hver observation har en varians σ_1^2 , σ_2^2 . Hertil kommer *kovariansen* $\sigma_{b_1 b_2}$, der udtrykker graden af korrelation mellem b_1 og b_2 . Kovariansen er defineret ved

$$\sigma_{b_1 b_2} = E[(b_1 - \mu_{b_1})(b_2 - \mu_{b_2})]$$

Kovariansen kan være positiv, negativ eller nul. Når $\sigma_{b_1 b_2}$ er positiv siges b_1 og b_2 at være positivt korrelerede; når $\sigma_{b_1 b_2}$ er negativ er de negativt korrelerede, og når $\sigma_{b_1 b_2}$ er nul er b_1 og b_2 ukorrelerede. Hvis b_1 og b_2 er *uafhængige* er kovariansen nul. Det modsatte er imidlertid ikke nødvendigvis tilfældet, det vil sige, at en kovarians med værdien nul ikke betyder, at de to observationer er uafhængige.

Observationerne er tidligere blevet samlet i en $m \times 1$ vektor $\mathbf{b}$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Hver af observationerne har en varians og mellem alle kombinationer af observationer er der kovarianser. For nemheds skyld indsættes varianserne og kovarianserne i en $m \times m$ kovariansmatrix Σ_b

$$\Sigma_b = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_m^2 \end{bmatrix}.$$

På diagonalen i Σ_b står varianserne for observationerne og udenfor diagonalen står kovarianserne. Kovariansmatricen er symmetrisk om diagonalen, da kovariansen mellem observation 1 og observation m (σ_{1m}) er lig kovariansen mellem observation m og observation 1 (σ_{m1})

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

Det gælder derfor, at

$$\Sigma_b = \Sigma_b^T.$$

Alle kovarianser forekommer derfor en gang over diagonalen i kovariansmatricen og en gang under diagonalen. Det antages nu, som det oftest gør i landmåling, at observationerne er uafhængige. Kovarianserne mellem observationerne er derfor nul og kovariansmatricen får derfor en simplere struktur, hvor der kun står varianser på diagonalen

$$\Sigma_b = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m^2 \end{bmatrix}.$$

Fra (2.8) kendes sammenhængen mellem varians og vægt. Med udgangspunkt

i kovariansmatricen kan vægtmatricen $\mathbf{C}$ opstilles.

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_m^2} \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_m^2} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ligesom kovariansmatricen er vægtmatricen diagonal. Den inverse af en diagonal matrix er en anden diagonal matrix, hvor hvert element er den reciprokke af det tilsvarende element i den originale matrix. Vægtmatricen er i matrixnotation givet ved

$$\mathbf{C} = \sigma_0^2 \mathbf{\Sigma}_b^{-1}. \quad (2.9)$$

Ligning (2.9) er generel og gælder hvad enten observationerne er uafhængige eller ej. Oftest sættes σ_0^2 a priori lig 1, hvorfor (2.9) reduceres til $\mathbf{C} = \mathbf{\Sigma}_b^{-1}$. Vægtmatricen er en beskrivelse af den *stokastiske model*.

2.4 Normalligninger

Efter observationsligningerne er opstillet, er næste skridt at opstille *normalligningerne*. Når observationsligningerne er opstillet, er der m ligninger, men der er $m + n$ ubekendte; der er n ukendte elementer samt m ukendte residualer. Umiddelbart er der altså flere ubekendte end observationer. Ligningssystemet giver ikke en entydig løsning. For at finde en entydig løsning må der altså opstilles ydeligere n ligninger. Herved opnår vi at have lige så mange ubekendte som vi har ligninger, og dermed er løsningen entydig. Ved nu at anvende mindste kvadraters princip får vi netop n ekstra ligninger. Disse ligninger kaldes normalligningerne. Ved at arbejde videre med nivellementseksemplet vises hvordan normalligningerne fremkommer.

2.4.1 Normalligninger for observationer med ens vægt

Når observationerne har ens vægt, som vi hidtil har antaget, er mindstekvadraters princip givet ved ligning (2.1). Dette krav påføres nu nivellementsproblemet.

Eksempel 2.4 Fortsat fra eksempel 2.2. Ligning (2.6) omskrives så residualerne udtrykkes eksplicit, og observationerne samt den kendte kote til punkt A indsættes i ligningerne

$$\begin{aligned}\hat{r}_1 &= H_A - H_B - b_1 = 6.923 - H_B \\ \hat{r}_2 &= H_B - H_D - b_2 = H_B - H_D - 1.115 \\ \hat{r}_3 &= H_A - H_D - b_3 = 5.825 - H_D \\ \hat{r}_4 &= H_C - H_B - b_4 = H_C - H_B - 2.097 \\ \hat{r}_5 &= H_C - H_D - b_5 = H_C - H_D - 3.203 \\ \hat{r}_6 &= H_C - H_A - b_6 = H_C - 9.036.\end{aligned}$$

Ifølge mindste kvadraters princip skal følgende størrelse minimeres

$$\begin{aligned}\phi &= \hat{r}_1^2 + \hat{r}_2^2 + \hat{r}_3^2 + \hat{r}_4^2 + \hat{r}_5^2 + \hat{r}_6^2 \\ &= (6.923 - H_B)^2 + (H_B - H_D - 1.115)^2 + (5.825 - H_D)^2 \\ &\quad + (H_C - H_B - 2.097)^2 + (H_C - H_D - 3.203)^2 \\ &\quad + (H_C - 9.036)^2.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Størrelsen minimeres ved at finde de partielt afledede af ϕ med hensyn til de ukendte koter, H_B , H_C og H_D . De partielt afledede sættes lig nul.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial H_B} &= -2(6.923 - H_B) + 2(H_B - H_D - 1.115) \\ &\quad - 2(H_C - H_B - 2.097) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial H_C} &= 2(H_C - H_B - 2.097) + 2(H_C - H_D - 3.203) \\ &\quad + 2(H_C - 9.036) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial H_D} &= -2(H_B - H_D - 1.115) - 2(5.825 - H_D) \\ &\quad - 2(H_C - H_D - 3.203) = 0\end{aligned}$$

Ved at gange ligningerne ovenfor ud kan de omskrives til

$$\begin{aligned}3H_B - H_C - H_D &= 5.941 \\ -H_B + 3H_C - H_D &= 14.336 \\ -H_B - H_C + 3H_D &= 1.507.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Ligningerne (2.11) er *normalligningerne*. Antallet af normalligninger svarer til antallet af ukendte størrelse i modellen; i dette tilfælde 3. Der er altså tre ligninger med tre ubekendte. Løsningen af dette ligningssystem giver mindste kvadraters estimat for koterne i de tre punkter:

$$\begin{aligned}H_B &= 6.931 \\ H_C &= 9.030 \\ H_D &= 5.823.\end{aligned}$$

◇

Eksempel 2.5 Fortsat fra eksempel 2.3. Mindste kvadraters estimat for koterne i punkt B , C og D findes nu ved matrixregning. Udfra matricerne $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ og $\hat{\mathbf{x}}$, der blev opstillet i eksempel 2.3, kan normalligningerne konstrueres fra følgende ligning

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \quad (2.12)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6.923 \\ 1.115 \\ -5.825 \\ 2.097 \\ 3.203 \\ 9.036 \end{bmatrix}.$$

Ved at gange matricerne ud fås normalligningssystemet nedenfor, der svarer til ligning (2.11). Ved at anvende ligning (2.12) og matricerne fra eksempel 2.3 er det altså muligt at opstille normalligningerne, hvis løsning tilfredsstiller mindste kvadraters princip. Det er lettere at opstille normalligningerne på denne måde fremfor som det blev gjort i eksempel 2.4. Mindste kvadraters princip er altså indbygget i (2.12); brugeren behøver ikke spekulere på minimering af vægtfunktionen, ϕ .

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.941 \\ 14.336 \\ 1.507 \end{bmatrix}$$

Løsningen af normalligningerne er på matrixform givet ved

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \\ &= \begin{bmatrix} 6.931 \\ 9.030 \\ 5.823 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

hvilket svarer til løsningen fundet i eksempel 2.4.

◇

2.4.2 Normalligninger for observationer med forskellig vægt

Nu ses på tilfældet hvor observationerne har forskellig vægt. Mindste kvadraters princip er nu givet ved ligning (2.2). Igen anvendes nivellementseksemplet til i to eksempler at illustrere hvordan princippet bruges. Eksemplerne svarer til eksempel 2.4 og 2.5, blot der nu anvendes vægte.

Eksempel 2.6 Fortsat fra eksempel 2.4. Denne gang antages de seks observerede højdeforskelle stadig at være uafhængige, men nu har de forskellig spredning og dermed forskellig vægt. Spredningerne regnes efter (5.2). Kilometerspredningen antages at være $0.005 \text{ m km}^{-0.5}$. De seks vægte kaldes $c_1, c_2, \dots, c_6$.

Observation	Afstand(L) [km]	Spredning [m]	Vægt
b_1	8.2	0.014	4 878.049
b_2	5.0	0.011	8 000.000
b_3	2.7	0.008	14 814.815
b_4	6.7	0.013	5 970.149
b_5	2.9	0.009	13 793.103
b_6	7.4	0.014	5 405.405

Vægtfunktionen, der skal minimeres i dette eksempel, er givet ved

$$\begin{aligned}
 \phi &= c_1 \hat{r}_1^2 + c_2 \hat{r}_2^2 + c_3 \hat{r}_3^2 + c_4 \hat{r}_4^2 + c_5 \hat{r}_5^2 + c_6 \hat{r}_6^2 \\
 &= c_1(6.923 - H_B)^2 + c_2(H_B - H_D - 1.115)^2 \\
 &\quad + c_3(5.825 - H_D)^2 + c_4(H_C - H_B - 2.097)^2 \\
 &\quad + c_5(H_C - H_D - 3.203)^2 + c_6(H_C - 9.036)^2.
 \end{aligned}$$

Denne ligning svarer til ligning (2.10) blot er vægtene tilføjet. For at minimere funktionen differentieres med hensyn til de ukendte koter, og udtrykkene sættes lig nul

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi}{\partial H_B} &= -2c_1(6.923 - H_B) + 2c_2(H_B - H_D - 1.115) \\
 &\quad - 2c_4(H_C - H_B - 2.097) = 0 \\
 \frac{\partial \phi}{\partial H_C} &= 2c_4(H_C - H_B - 2.097) + 2c_5(H_C - H_D - 3.203) \\
 &\quad + 2c_6(H_C - 9.036) = 0 \\
 \frac{\partial \phi}{\partial H_D} &= -2c_2(H_B - H_D - 1.115) - 2c_3(5.825 - H_D) \\
 &\quad - 2c_5(H_C - H_D - 3.203) = 0.
 \end{aligned}$$

Når ligningerne ganges ud, reduceres og omordnes fås normalligningerne

$$\begin{aligned}(c_1 + c_2 + c_4)H_B + (-c_4)H_C + (-c_2)H_D &= 6.923c_1 + 1.115c_2 \\ &\quad - 2.097c_4 \\ (-c_4)H_B + (c_4 + c_5 + c_6)H_C + (-c_5)H_D &= 2.097c_4 + 3.203c_5 \\ &\quad + 9.036c_6 \\ (-c_2)H_B + (-c_5)H_C + (c_2 + c_3 + c_5)H_D &= -1.115c_2 + 5.825c_3 \\ &\quad - 3.203c_5.\end{aligned}$$

Ved indsættelse af de numeriske værdier for vægtene fås

$$\begin{aligned}18\,848.198H_B - 5\,970.149H_C - 8\,000.000H_D &= 30\,171.329 \\ -5\,970.149H_B + 25\,168.658H_C - 13\,793.103H_D &= 105\,541.957 \\ -8\,000.000H_B - 13\,793.103H_C + 36\,607.918H_D &= 33\,196.986.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Løsningen af normalligningerne giver koterne til punkt B , C og D

$$\begin{aligned}H_B &= 6.933 \\ H_C &= 9.030 \\ H_D &= 5.824.\end{aligned}$$

På grund af at observationerne nu vægtes forskelligt, er de fundne koter forskellige fra de, der blev fundet i eksempel 2.4 og 2.5. $\diamond$

Eksempel 2.7 Fortsat fra eksempel 2.6. Nu gentages regningerne som matrixregning. Igen tages udgangspunkt i matricerne $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ og $\hat{\mathbf{x}}$ fra eksempel 2.3. Ydeligere introduceres vægtmatricen $\mathbf{C}$. Denne er en diagonalmatrix med vægtene til observationerne på diagonalen:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & & & & & \\ & c_2 & & & & \\ & & c_3 & & & \\ & & & c_4 & & \\ & & & & c_5 & \\ & & & & & c_6 \end{bmatrix}$$

Normalligningerne konstrueres nu udfra følgende ligning

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A}) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{b}. \quad (2.14)$$

Når de numeriske værdier indsættes fås:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} 4878.049 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8000.000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14814.815 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5970.149 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13793.103 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5405.405 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \end{bmatrix} =
 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} 4878.049 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8000.000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14814.815 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5970.149 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13793.103 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5405.405 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} -6.923 \\ 1.115 \\ -5.825 \\ 2.097 \\ 3.203 \\ 9.036 \end{bmatrix}.$$

Når ligningerne ganges ud fås

$$\begin{bmatrix} 18848.198 & -5970.149 & -8000.000 \\ -5970.149 & 25168.658 & -13793.103 \\ -8000.000 & -13793.103 & 36607.918 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \end{bmatrix} =
 \begin{bmatrix} 30171.329 \\ 105541.957 \\ 33196.986 \end{bmatrix}.$$

Ligningssystemet er magen til ligning (2.13), og løsningerne er derfor også ens

$$\begin{bmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \end{bmatrix} =
 \begin{bmatrix} 6.933 \\ 9.030 \\ 5.824 \end{bmatrix}.$$

Der fås samme resultat som i eksempel 2.6. Ved brug af (2.14) er mindste kvadraters princip således indbygget i regningerne. Det er ikke nødvendigt eksplicit at tænke på minimering af vægtfunktionen. $\diamond$

2.4.3 Generel udledning af normalligninger

Normalligningerne givet ved ligning (2.14) er fuldstændig generelle, selvom de indtil videre kun er illustreret ved et eksempel. Normalligningerne har altid denne form, når udjævningsproblemet formuleres som ligning (2.7). Nu følger en generel udledning, der leder frem til normalligningerne.

Når observationerne er uafhængige og har forskellig vægt, kræver mindste kvadraters princip, at vægtfunktionen (2.2) minimeres. Vægtfunktionen kan på matrix form skrives som

$$\phi = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 & \hat{r}_2 & \cdots & \hat{r}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \vdots \\ \hat{r}_m \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

da den, når den ganges ud, giver

$$\phi = c_1 \hat{r}_1^2 + c_2 \hat{r}_2^2 + \cdots + c_m \hat{r}_m^2.$$

Da residualvektoren $\hat{\mathbf{r}}$ i eksempel 2.3 blev opstillet som en $m \times 1$ vektor, kan (2.15) skrives som

$$\phi = \hat{\mathbf{r}}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.16)$$

Ligning (2.7) omskrives til

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$$

og indsættes i ligning (2.16)

$$\begin{aligned} \phi &= (\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b})^T \mathbf{C} (\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) \\ &= (\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T - \mathbf{b}^T) \mathbf{C} (\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) \\ &= (\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C} - \mathbf{b}^T \mathbf{C}) (\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) \\ &= \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{C} \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Da ϕ er en skalar, er hvert led i ligning (2.17) også skalarer. Endvidere er en skalar transponeret lig sig selv. Andet og tredje led er derfor lig hinanden, da

$$\mathbf{b}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{b}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}})^T = \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{b}.$$

Da vægtmatricen $\mathbf{C}$ altid er symmetrisk, er den lig sig selv transponeret. Ved at slå andet og tredje led i ligning (2.17) sammen fås

$$\phi = \hat{\mathbf{x}}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A}) \hat{\mathbf{x}} - 2 \mathbf{b}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}^T \mathbf{C} \mathbf{b}. \quad (2.18)$$

Ligning (2.18) er vægtfunktionen, der skal minimeres for at opfylde mindste kvadraters princip. I ligningen er alle matricer og vektorer konstanter på nær $\hat{\mathbf{x}}$, der indeholder de ukendte elementer. For at minimere ϕ må de partielt afledede med hensyn til $\hat{\mathbf{x}}$ derfor sættes lig nul. Da sidste led i (2.18) ikke indeholder $\hat{\mathbf{x}}$, er den partielt afledede af dette led nul. Ved at differentiere ϕ med hensyn til $\hat{\mathbf{x}}$ fås

$$\frac{\partial \phi}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = 2\hat{\mathbf{x}}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A}) - 2\mathbf{b}^T\mathbf{C}\mathbf{A} = 0.$$

Ved at dividere med 2, flytte om på leddene og transponere fås

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{b},$$

der er identisk med (2.14). Denne generelle udledning betyder, at når vi har et sæt observationsligninger, der kan skrives som

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{r}}$$

så bestemmes normalligningerne som

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{b}, \quad (2.19)$$

hvor $\mathbf{C}$ er vægtmatricen for observationerne. Ved bestemmelsen af vægtmatricen indgår σ_0^2 , jævnfør (2.9). Da $\mathbf{C}$ indgår i både venstre side og højre side af normalligningerne, kan σ_0^2 imidlertid forkortes væk. Ved opstillingen af normalligningerne er det derfor ikke nødvendigt at have kendskab til σ_0^2 . Venstre side af normalligningerne er en $n \times n$ matrix, der er symmetrisk om diagonalen, jævnfør eksemplerne i dette kapitel. Normalligningernes løsning findes ved

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{b} \\ &= \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ligning (2.20) gælder både for diagonale vægtmatricer og for fulde vægtmatricer. I de tilfælde, hvor observationerne er ens vægtet og uafhængige, er $\mathbf{C}$ diagonal, og denne reduceres til enhedsmatricen $\mathbf{I}$, der har et-taller på diagonalen. Når normalligningerne er løst, har vi det bedste estimat (i mindste kvadraters forstand) for elementerne i modellen. Residualerne kan

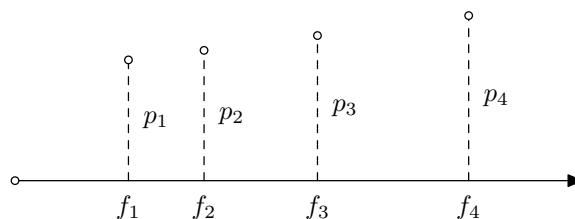
herefter bestemmes ved

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}. \quad (2.21)$$

2.5 Opgaver

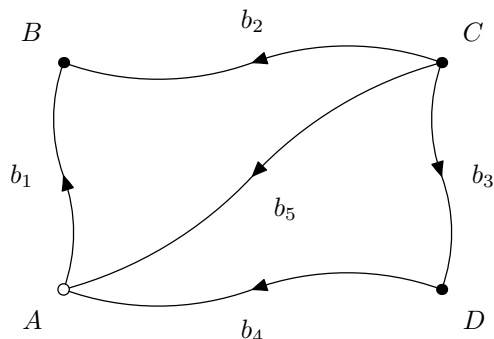
Opgave 2.1 Langs en målelinie er målt 4 fodpunkter og 4 perpendicularer

$f_1 = 15$	$p_1 = 15.97$
$f_2 = 25$	$p_2 = 17.23$
$f_3 = 40$	$p_3 = 19.19$
$f_4 = 60$	$p_4 = 21.83$



Fodpunkterne antages at være bestemt fejlfrit. Bestem den rette linie $p = a \times f + b$, der bedst muligt beskriver de fire punkter. Beregn residualerne til perpendicularærerne.

Opgave 2.2 I et nivellementsnet er fem højdeforskelle målt mellem fire punkter ved geometrisk nivellement. Koten til punkt A er kendt, $H_A = 10.000$. Observationerne er $b_1 = -2.023$, $b_2 = -1.016$, $b_3 = 1.982$, $b_4 = -0.998$ og $b_5 = 1.022$.



Bestem lukkesummerne for ring ABC og ring ACD . Opstil $\mathbf{A}$ matricen og bestemt koterne til punkt B , punkt C og punkt D . Beregn residualerne og bestemt de korrigerede observationer. Kontroller efter udjævningen, at lukkesummerne er nul, når de korrigerede observationer anvendes.

Opgave 2.3 Perpendikulærene i opgave 2.1 er bestemt med følgende spredninger: $\sigma_{p_1} = 0.02$, $\sigma_{p_2} = 0.01$, $\sigma_{p_3} = 0.01$ og $\sigma_{p_4} = 0.02$. Opstil vægtmatricen $\mathbf{C}$ og bestemt koefficienterne til den rette linie ved hjælp af (2.20). Beregn residualerne. Sammenlign med resultaterne fra opgave 2.1.

Opgave 2.4 Længderne af de nivellerede strækninger i opgave 2.2 er, udtrykt i kilometer, $s_1 = 3.2$, $s_2 = 4.0$, $s_3 = 2.7$, $s_4 = 5.7$ og $s_5 = 6.9$. Opstil ved hjælp af (5.2) vægtmatricen $\mathbf{C}$ for nivellementsobservationerne. Kilometerspredningen er $0.005 \text{ m}/\sqrt{\text{km}}$. Beregn koterne til punkterne B , C og D ved at inddrage vægtmatricen i udjævningen. Beregn ydeligere residualer og korrigerede observationer. Sammenlign med resultaterne fra opgave 2.2.

Opgave 2.5 Regn opgave 2.4 som fri udjævning.

Kapitel 3

Udjævning af ulineære problemer

Hidtil er kun problemer med lineære observationerligninger blevet udjævnet. Denne type problemer er karakteriseret ved, at $\mathbf{A}$ matricen udelukkende indeholder konstanter jævnfør kapitel 2. Normalligningerne har ligeledes været lineære. Dette betyder, at når normalligningerne er løst, har vi umiddelbart mindste kvadraters estimat for elementerne. Det er i midlertid kun få af de problemer vi arbejder med i landmåling, der leder til lineære observationsligninger; oftest er de ulineære. Mindste kvadraters princip kan anvendes på ulineære problemer, men det komplicerer regningerne. Dette kapitlet beskriver derfor, hvordan det er muligt at anvende formelapparatet fra kapitel 2, selvom der arbejdes med ulineære problemer. Det skal pointeres, at lineariseringen og den iterative løsning af udjævningsproblemet, der præsenteres i dette kapitel, udelukkende er *teknikker*, der gør det muligt at bruge formlerne fra kapitel 2.

3.1 Linearisering

Mindste kvadraters princip anvendes som regel på lineære modeller. Når vi møder modeller, der involverer ulineære ligninger, må ligningerne derfor lineariseres. Ligningerne lineariseres ved en Taylor rækkeudvikling. For at kunne linearisere en ligning ved rækkeudvikling, må vi kende et godt bud på hvilke værdier de ubekendte variable i ligningen har. Ved linearisering af observationsligninger må vi derfor kende gode værdier for elementerne, der er de ubekendte variable i observationsligningerne. Dette bud på elementernes værdier kaldes de *foreløbige værdier*. Nu er det jo elementerne, vi ønsker at bestemme gennem udjævningen, og derfor kender vi ikke elementernes værdier på forhånd. Der er desværre ingen entydig opskrift på hvordan de foreløbige værdier bestemmes. Oftest er det dog muligt at beregne foreløbige værdier udfra en del af observationsmaterialet.

En ulineær observationsligning i en ubekendt kan skrives som

$$b = F(x).$$

I dette tilfælde er den ubekendte x . Den lineariserede ligning er givet ved

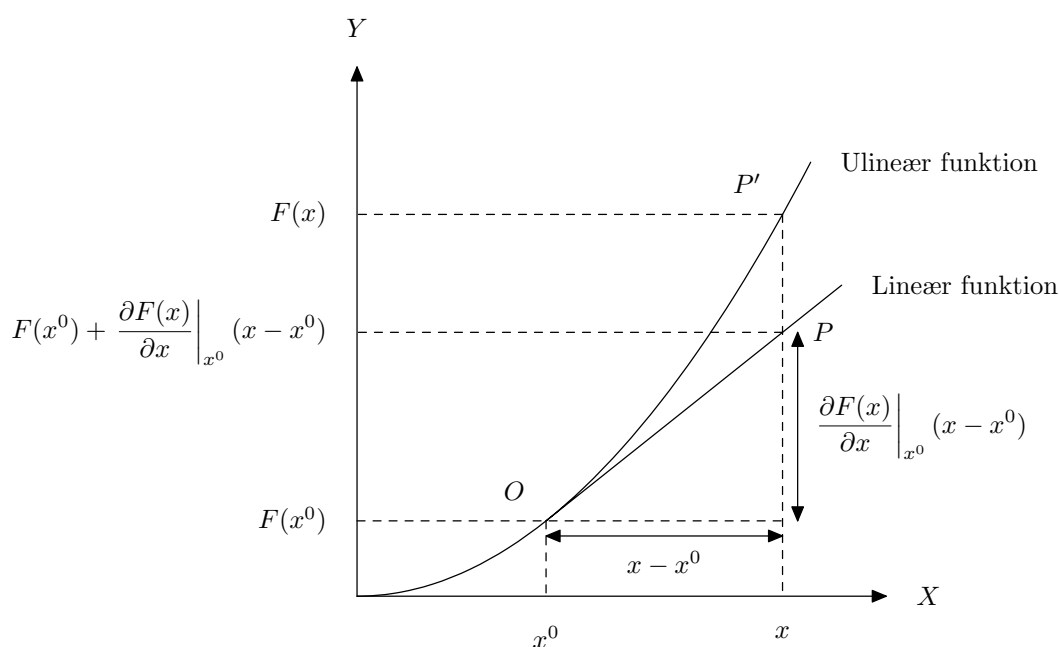
$$b = \underbrace{F(x^0)}_{0\text{'te orden}} + \underbrace{\frac{\partial F(x)}{\partial x} \Big|_{x=x^0} (x - x^0)}_{1\text{'te orden}} + \underbrace{\dots}_{\text{højere orden}}, \quad (3.1)$$

hvor x_0 er den foreløbige værdi for x .

0'te ordens leddet er første led i (3.1). Dette er observationen, der svarer til x^0 . Den numeriske værdi for leddet findes ved at indsætte x^0 i den ulineære observationsligning.

1'te ordens leddet er andet led i (3.1). Dette led består af den partielt afledede af funktionen med hensyn til elementet udregnet i den foreløbige værdi ganget med forskellen mellem elementet og den foreløbige værdi.

Højere ordens led medtages ikke. Rækkeudviklingen sluttes altså efter 1'te ordens leddet, således 2. ordens og højere led bortfalder. Grunden hertil er, at 2. ordens og højere led er ulineære.



Figur 3.1: Linearisering af funktion.

Lineariseringen er illustreret i figur 3.1. Den ulineære funktion er vist i figuren som en krum kurve, mens den lineariserede funktion er givet ved den rette linie. Den foreløbige værdi for elementet er benævnt x^0 .

0'te ordens leddet i rækkeudviklingen er funktionsværdien svarende til x^0 . Punktet svarende hertil er markeret med 'O'.

1'te ordens leddet i rækkeudviklingen er hældningskvotienten i x^0 ganget med forskellen mellem x og x^0 . Hældningskvotienten i punkt x^0 ($\left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x=x^0}$) er hældningen for tangenten til kurven i punkt x^0 . 1'te ordens leddet er altså funktionstilvæksten for tangenten for stykket $(x - x^0)$. Denne størrelse er den vertikale afstand mellem punkt 'O' og punkt 'P' på figuren.

Højere orden. Funktionsværdien for den ulineære funktion svarende til elementet x er $F(x)$. Punktet på kurven, der svarer hertil, er markeret med P' . Den vertikale afstand mellem P' og P er den fejl, der begås ved at stoppe rækkeudviklingen efter 1'te ordens leddet. Jo større forskellen er mellem x og x^0 , jo større fejl begås. Det er derfor vigtigt, at den foreløbige værdi x^0 ligger så tæt på x som muligt.

Eksempel 3.1 En observationsligning, der beskriver en parabel, lineariseres. Ligningen er givet ved

$$b = x^2.$$

Den lineariserede ligning er ifølge (3.1)

$$b = \underbrace{(x^0)^2}_{0'te\ orden} + \underbrace{2x^0(x - x^0)}_{1'te\ orden}.$$

Vi vælger at linearisere funktionen om den foreløbige værdi $x^0 = 2$. Samtidig antager vi, at $x = 3$. Funktionsværdien for den lineariserede observationsligning er 8 mens den ulineære observationsligning har værdien 9. Ved lineariseringen begår vi altså en fejl på $9 - 8 = 1$ ved at vælge 2 som foreløbig værdi. $\diamond$

Vi antager nu, at den ulineære observationsligning er funktion af to variable, x_1 og x_2 , det vil sige

$$b = F(x_1, x_2). \quad (3.2)$$

Den lineariserede ligning er nu givet ved

$$b = F(x_1^0, x_2^0) + \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_1^0} (x_1 - x_1^0) + \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=x_2^0} (x_2 - x_2^0). \quad (3.3)$$

De foreløbige værdier for x_1 og x_2 kaldes x_1^0 og x_2^0 . Ligningen svarer til (3.1) blot der er tilføjet endnu en variabel. Når antallet af ubekendte stiger, vokser (3.3) tilsvarende. For at udtrykke (3.3) så kompakt som muligt indføres matrixnotation. Differentialkvotienterne $\left. \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_1^0}$ og $\left. \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=x_2^0}$ benævnes j_1 og j_2 . Ligning (3.3) kan derfor skrives som

$$\begin{aligned} b &= F(x_1^0, x_2^0) + j_1(x_1 - x_1^0) + j_2(x_2 - x_2^0) \\ &= b^0 + j_1(x_1 - x_1^0) + j_2(x_2 - x_2^0). \end{aligned} \quad (3.4)$$

0'te ordens leddet b^0 bestemmes ved at indsætte de foreløbige værdier i den ulineære observationsligning (3.2). Differentialkvotienterne samles i en rækkevektor $\mathbf{j}$ og forskellene mellem de ukendte variable (elementer) og de foreløbige værdier samles i søjlevektoren $\hat{\mathbf{x}}$. Endelig flyttes b^0 over på ligningens venstre side og $b - b^0$ samles i en $\mathbf{b}$ vektor

$$\mathbf{j} = [j_1 \quad j_2] \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = [b - b^0]. \quad (3.5)$$

Ligning (3.4) kan nu skrives som

$$\mathbf{b} = \mathbf{j}\hat{\mathbf{x}}. \quad (3.6)$$

Hvis antallet af variable stiger til n har (3.6) stadig følgende generelle form

$$\mathbf{b} = \mathbf{j}\hat{\mathbf{x}}, \quad (3.7)$$

hvor $\mathbf{j}$ og $\hat{\mathbf{x}}$ begge indeholder n elementer. Ligning (3.7) udtrykker lineariseringen af en ligning, der er funktion af n forskellige variable. For at forblive ved observationsligningerne er det altså ligningen for én observation, der er funktion af n elementer.

Eksempel 3.2 Eksempel 3.1, side 63 i (Borre, 1992) gennemarbejdes i større detalje. Fra tre kendte punkter er målt afstande til et fjerde punkt, hvis koordinater ønskes bestemt. I første omgang vælges koordinaterne til alle punkterne som elementer eller ubekendte i udjævningen. Der er derfor otte elementer ($Y_1, Y_2, Y_3, Y_P, X_1, X_2, X_3, X_P$). Svarende til de otte elementer vælges otte foreløbige koordinater ($Y_1^0, Y_2^0, Y_3^0, Y_P^0, X_1^0, X_2^0, X_3^0, X_P^0$). De tre afstandsobservationer er målt med ens præcision, så vægtmatricen $\mathbf{C}$ er identisk med enhedsmatricen $\mathbf{I}$, der har ettaller på diagonalen og nuller udenfor.

Observationsligningen for en afstandsobservation fra punkt j til punkt k er givet ved

$$b_i = F_i(Y_k, Y_j, X_k, X_j) = \sqrt{(Y_k - Y_j)^2 + (X_k - X_j)^2}. \quad (3.8)$$

Indeks i henviser til den i 'te observation. I lineariseringsprocessen skal de partielt afledede af funktionen med hensyn til elementerne bestemmes

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial b_i}{\partial Y_j} \right|_{Y_j=Y_j^0} &= \frac{-Y_k^0 + Y_j^0}{\sqrt{(Y_k^0 + Y_j^0)^2 + (X_k^0 - X_j^0)^2}} = \frac{-Y_k^0 + Y_j^0}{b_i^0} = -\sin \alpha_{jk}^0 \\
 \left. \frac{\partial b_i}{\partial Y_k} \right|_{Y_k=Y_k^0} &= \frac{Y_k^0 - Y_j^0}{b_i^0} = \sin \alpha_{jk}^0 \\
 \left. \frac{\partial b_i}{\partial X_j} \right|_{X_j=X_j^0} &= \frac{-X_k^0 + X_j^0}{b_i^0} = -\cos \alpha_{jk}^0 \\
 \left. \frac{\partial b_i}{\partial X_k} \right|_{X_k=X_k^0} &= \frac{X_k^0 - X_j^0}{b_i^0} = \cos \alpha_{jk}^0.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Afstanden mellem de foreløbige koordinater kaldes b_i^0 . Denne findes ved indsætte de foreløbige værdier i (3.8). Nu ses på afstandsobservationen fra punkt 1 til punkt P . Den ulineære observationsligning er

$$b_1 = F_1(Y_1, Y_P, X_1, X_P) = \sqrt{(Y_1 - Y_P)^2 + (X_1 - X_P)^2}.$$

Observationsligningen er funktion af koordinaterne til punkt 1 og punkt P . Fremover angives ikke, at partielt afledede beregnes i de foreløbige værdier. I lineariseret form er ligningen givet ved

$$\begin{aligned}
 b_1 &= F_1(Y_1^0, Y_P^0, X_1^0, X_P^0) \\
 &+ \frac{\partial b_1}{\partial Y_1}(Y_1 - Y_1^0) + \frac{\partial b_1}{\partial Y_P}(Y_P - Y_P^0) \\
 &+ \frac{\partial b_1}{\partial X_1}(X_1 - X_1^0) + \frac{\partial b_1}{\partial X_P}(X_P - X_P^0) \\
 &= b_1^0 + \frac{-Y_P^0 + Y_1^0}{b_1^0}(Y_1 - Y_1^0) + \frac{Y_P^0 - Y_1^0}{b_1^0}(Y_P - Y_P^0) \\
 &+ \frac{-X_P^0 + X_1^0}{b_1^0}(X_1 - X_1^0) + \frac{X_P^0 - X_1^0}{b_1^0}(X_P - X_P^0) \\
 &= b_1^0 + j_{1Y_1}(Y_1 - Y_1^0) + j_{1Y_P}(Y_P - Y_P^0) + j_{1X_1}(X_1 - X_1^0) + j_{1X_P}(X_P - X_P^0).
 \end{aligned}$$

Dobbeltindekseringen af j 'erne angiver hvilken observationsligning, der differentieres med hensyn til hvilket element. For eksempel er j_{1X_P} første observationsligning differentieret med hensyn til X_P .

Analogt til (3.5) opstilles $\mathbf{j}$, $\hat{\mathbf{x}}$ og $\mathbf{b}$ vektorerne

$$\mathbf{j}_1 = [j_{1Y_1} \quad j_{1Y_P} \quad j_{1X_1} \quad j_{1X_P}] \quad \hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} (Y_1 - Y_1^0) \\ (Y_P - Y_P^0) \\ (X_1 - X_1^0) \\ (X_P - X_P^0) \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_1 = [b_1 - b_1^0],$$

så den lineariserede ligning nu kan skrives som

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{j}_1 \hat{\mathbf{x}}_1.$$

Indeks 1 ved $\mathbf{j}$, $\hat{\mathbf{x}}$ og $\mathbf{b}$ vektorerne henviser til observation nummer et. $\diamond$

I udjævningsproblemer arbejdes med flere observationer ad gangen. Derfor udvides beskrivelsen fra at omhandle én observation til at omhandle m observationer, der hver især er funktion af de n variable.

$$\begin{aligned} b_1 &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ b_2 &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ b_m &= F_m(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Analogt til (3.4) lineariseres hver ligning

$$\begin{aligned} b_1 &= b_1^0 + j_{11}(x_1 - x_1^0) + j_{12}(x_2 - x_2^0) + \dots + j_{1n}(x_n - x_n^0) \\ b_2 &= b_2^0 + j_{21}(x_1 - x_1^0) + j_{22}(x_2 - x_2^0) + \dots + j_{2n}(x_n - x_n^0) \\ &\vdots \\ b_m &= b_m^0 + j_{m1}(x_1 - x_1^0) + j_{m2}(x_2 - x_2^0) + \dots + j_{mn}(x_n - x_n^0). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ligning (3.10) skrives mere kompakt ved at samle de partielt afledede i m rækkevektorer, $\mathbf{j}_1 = [j_{11} \quad j_{12} \quad \dots \quad j_{1n}]$, $\mathbf{j}_2 = [j_{21} \quad j_{22} \quad \dots \quad j_{2n}]$ og så videre. Analogt til (3.5) opstilles m søjlevektorer $\hat{\mathbf{x}}_i$ indeholdende forskellene mellem elementerne og de foreløbige værdier. Ligningen (3.10) skrives nu som

$$\begin{aligned} b_1 &= b_1^0 + \mathbf{j}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 \\ b_2 &= b_2^0 + \mathbf{j}_2 \hat{\mathbf{x}}_2 \\ &\vdots \\ b_m &= b_m^0 + \mathbf{j}_m \hat{\mathbf{x}}_m. \end{aligned}$$

Ligningen omordnes

$$\begin{aligned} b_1 - b_1^0 &= \mathbf{j}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 \\ b_2 - b_2^0 &= \mathbf{j}_2 \hat{\mathbf{x}}_2 \\ &\vdots \\ b_m - b_m^0 &= \mathbf{j}_m \hat{\mathbf{x}}_m. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Der er m $\mathbf{j}$ vektorer, der hver indeholder n partielt afledede. Vektorerne kan samles i en $m \times n$ $\mathbf{J}$ matrix, hvor $\mathbf{j}_1$ udgør første række, $\mathbf{j}_2$ udgør anden række og så videre. Venstre side af ligning 3.11 samles i en $m \times 1$ søjlevektor $\mathbf{b}$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_{11} & \mathbf{j}_{12} & \cdots & \mathbf{j}_{1n} \\ \mathbf{j}_{21} & \mathbf{j}_{22} & \cdots & \mathbf{j}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{j}_{m1} & \mathbf{j}_{m2} & \cdots & \mathbf{j}_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 - b_1^0 \\ b_2 - b_2^0 \\ \vdots \\ b_m - b_m^0 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{J}$ matrixen omdøbes til $\mathbf{A}$ og (3.11) skrives ganske kort i matrixform som

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}.$$

$\mathbf{A}$ er designmatrixen. Ved endeligt at introducere residualvektoren fås observationsligningerne, der kendes fra kapitel 2.

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{r}}.$$

Eksempel 3.3 Fortsat fra eksempel 3.2. Efter samme fremgangsmåde som i eksempel 3.2 opstilles de lineariserede observationsligninger for anden og tredje observation

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 &= \mathbf{j}_2 \hat{\mathbf{x}}_2 \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{j}_3 \hat{\mathbf{x}}_3. \end{aligned}$$

For disse to observationer indeholder $\mathbf{j}$, $\hat{\mathbf{x}}$ og $\mathbf{b}$ vektorerne

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_2 &= [j_{2Y_2} \quad j_{2Y_P} \quad j_{2X_2} \quad j_{2X_P}] \quad \hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} (Y_2 - Y_2^0) \\ (Y_P - Y_P^0) \\ (X_2 - X_2^0) \\ (X_P - X_P^0) \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = [b_2 - b_2^0] \\ \mathbf{j}_3 &= [j_{3Y_3} \quad j_{3Y_P} \quad j_{3X_3} \quad j_{3X_P}] \quad \hat{\mathbf{x}}_3 = \begin{bmatrix} (Y_3 - Y_3^0) \\ (Y_P - Y_P^0) \\ (X_3 - X_3^0) \\ (X_P - X_P^0) \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_3 = [b_3 - b_3^0]. \end{aligned}$$

De tre $\mathbf{j}$ vektorer samles nu til $\mathbf{A}$ matricen, således $\mathbf{j}_1$ udgør første række i matricen, $\mathbf{j}_2$ udgør anden række i matricen og $\mathbf{j}_3$ udgør tredje række i matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} j_{1Y_1} & 0 & 0 & j_{1Y_P} & j_{1X_1} & 0 & 0 & j_{1X_P} \\ 0 & j_{2Y_2} & 0 & j_{2Y_P} & 0 & j_{2X_2} & 0 & j_{2X_P} \\ 0 & 0 & j_{3Y_3} & j_{3Y_P} & 0 & 0 & j_{3X_3} & j_{3X_P} \end{bmatrix}.$$

De tre $\hat{\mathbf{x}}$ vektorer samles ligeledes til én vektor. Endelig samles $\mathbf{b}$ vektorerne til én vektor

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} (Y_1 - Y_1^0) \\ (Y_2 - Y_2^0) \\ (Y_3 - Y_3^0) \\ (Y_P - Y_P^0) \\ (X_1 - X_1^0) \\ (X_2 - X_2^0) \\ (X_3 - X_3^0) \\ (X_P - X_P^0) \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 - b_1^0 \\ b_2 - b_2^0 \\ b_3 - b_3^0 \end{bmatrix}.$$

Hver række i $\mathbf{A}$ svarer til en observation og hver søjle svarer til et element i udjævningen; i dette tilfælde altså en koordinat. Række et svarer til observation 1, række to svarer til observation 2 og række tre svarer til observation 3. I eksempel 3.2 valgtes følgende rækkefølge af elementerne: $Y_1, Y_2, Y_3, Y_P, X_1, X_2, X_3, X_P$. Søjlerne i $\mathbf{A}$ kommer i samme rækkefølge. Første søjle svarer til Y_1 , anden søjle svarer til Y_2 og så videre. Rækkefølgen i $\hat{\mathbf{x}}$ vektoren skal være den samme som rækkefølgen af søjlerne i $\mathbf{A}$. Tilsvarende skal rækkefølgen i $\mathbf{b}$ svare til rækkefølgen af rækkerne i $\mathbf{A}$.

Første række i $\mathbf{A}$ beskriver afstandsobservationen fra punkt 1 til punkt P . Denne observation er kun funktion af netop koordinaterne til disse to punkter. Derfor er kun pladserne i søjle 1, 4, 5 og 8 besat, da disse er knyttet til de fire koordinater Y_1, Y_P, X_1 og X_P . Det forholder sig tilsvarende med de to øvrige rækker i $\mathbf{A}$.

Koordinaterne til punkterne 1, 2 og 3 er kendte i forvejen som nævnt i eksempel 3.2. Det er kun koordinaterne til punkt P , der ønskes bestemt gennem udjævningen. Søjlerne i $\mathbf{A}$ svarende til de tre kendte koordinater slettes derfor; det er søjle 1, 2, 3, 5, 6 og 7. De tilsvarende pladser i $\hat{\mathbf{x}}$ slettes ligeledes. Matricerne er nu reduceret til

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} j_{1Y_P} & j_{1X_P} \\ j_{2Y_P} & j_{2X_P} \\ j_{3Y_P} & j_{3X_P} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} (Y_P - Y_P^0) \\ (X_P - X_P^0) \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 - b_1^0 \\ b_2 - b_2^0 \\ b_3 - b_3^0 \end{bmatrix}.$$

Nu tilføjes residualvektoren $\hat{\mathbf{r}}$

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \hat{r}_3 \end{bmatrix}$$

og det lineariserede system af observationsligninger opstilles

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{r}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 - b_1^0 \\ b_2 - b_2^0 \\ b_3 - b_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{1Y_P} & j_{1X_P} \\ j_{2Y_P} & j_{2X_P} \\ j_{3Y_P} & j_{3X_P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Y_P - Y_P^0) \\ (X_P - X_P^0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \hat{r}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Ligningssystemet indeholder tre observationer og to elementer, så antallet af overbestemmelser er $u = m - n = 3 - 2 = 1$. $\diamond$

Nu har de lineariserede observationsligninger den form, der kendes fra kapitel 2. Der skal dog knyttes nogle bemærkninger til ligning (3.12).

- Observationsvektoren $\mathbf{b}$ indeholder ikke længere kun selve observationerne men forskellen mellem observationerne og det observationssæt, der kan beregnes ud fra de foreløbige værdier. Når de foreløbige værdier er tæt på elementerne, er observationerne og de beregnede observationer næsten lige store, og derfor er værdierne i $\mathbf{b}$ vektoren små.
- Designmatricen $\mathbf{A}$ indeholder ikke længere blot konstanter som det var tilfældet ved de lineære problemer. Hver plads i $\mathbf{A}$ indeholder den afledede af en af de m observationsligninger med hensyn til et af de n elementer. Ved indsættelse af de foreløbige værdier for elementerne i differentialkvotienten fremkommer den numeriske værdi, der bruges i udjævningen.
- Elementvektoren $\hat{\mathbf{x}}$ indeholder forskellen mellem selve elementerne og de foreløbige værdier for elementerne. I de lineære tilfælde indeholdt $\hat{\mathbf{x}}$ de udjævned elementer.

Formelsættet, der blev opstillet i kapitel 2, kan nu anvendes på de lineariserede observationsligninger. I lineariseringsprocessen stoppes rækkeudviklingen efter 1'te ordens leddet. Dette betyder, at der begås små fejl. Ved at gentage udjævningsproceduren flere gange mindskes fejlenes indflydelse. Løsningen findes ved en iterativ proces.

3.2 Iterativ løsning

Ved at erstatte de ulineære observationsligninger med et sæt lineære ligninger begås en fejl. For at mindske fejlen *itereres* udjævningsproceduren. Følgende trin gennemløbes.

1. Observationsligningerne lineariseres, så udtrykkene for de enkelte elementer i $\mathbf{A}$ matricen kendes.
2. Der vælges et sæt foreløbige værdier for elementerne, $\mathbf{x}^0$. De foreløbige værdier kan oftest bestemmes udfra en delmængde af observationerne.
3. Matricer opstilles:
 - $\mathbf{A}$ matricen opstilles ved hjælp af de lineariserede observationsligninger og de foreløbige værdier for elementerne.
 - Udfra de *ulineære* observationsligninger og de foreløbige værdier beregnes det observationssæt, der svarer til de foreløbige værdier. Observationerne og de beregnede observationer trækkes fra hinanden og, $\mathbf{b}$ vektoren opstilles. Når de foreløbige værdier er tæt på elementerne, indeholder $\mathbf{b}$ vektoren små tal.
 - Vægtmatricen $\mathbf{C}$ opstilles.
4. Mindste kvadraters estimat bestemmes udfra (2.20). Estimatet kaldes $\hat{\mathbf{x}}^1$. Som vist tidligere indeholder $\hat{\mathbf{x}}^1$ ikke de absolutte værdier for elementerne men forskellen mellem elementerne og de foreløbige værdier; der er altså tale om *tilvækster* til elementerne.
5. Elementtilvæksterne lægges til de foreløbige værdier, så der fås et nyt sæt foreløbige værdier for elementerne, $\mathbf{x}^1$,

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \hat{\mathbf{x}}^1. \quad (3.13)$$

Hvis det oprindelige sæt foreløbige værdier er så tæt på mindste kvadraters estimat for elementerne, at fejlene fra lineariseringsprocessen kan ignoreres (se figur 3.1), er det endelige estimat for elementerne givet ved (3.13).

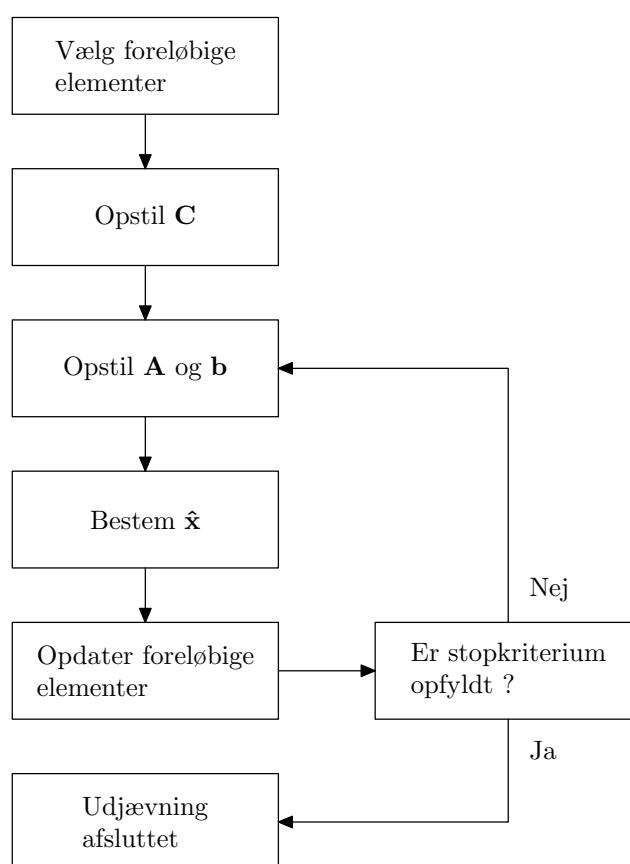
6. Ofte er $\mathbf{x}^0$ ikke en god nok tilnærmelse, og $\mathbf{x}^0 + \hat{\mathbf{x}}^1$ giver derfor kun *forbedrede* foreløbige værdier. Hele beregningsgangen gentages derfor påny startende med opstilling af $\mathbf{A}$ og $\mathbf{b}$ men denne gang udfra de nye foreløbige værdier $\mathbf{x}^1$. Det nye estimat for elementerne, der kaldes $\hat{\mathbf{x}}^2$, lægges til de foreløbige værdier

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + \hat{\mathbf{x}}^2. \quad (3.14)$$

Hvis fejlene fra lineariseringsprocessen nu kan ignoreres, er det endelige estimat for elementerne (3.14). Hvis dette ikke er tilfældet gentages proceduren indtil approksimationen er tilfredsstillende. De endelige værdier for elementerne er således de oprindelige foreløbige værdier $\mathbf{x}^0$ plus summen af alle elementtilvæksterne. Dette er det samme som de seneste foreløbige værdier plus de seneste tilvækster. Hver iteration afsluttes med at kontrollere, om der skal itereres ydeligere eller

om udjævningen er *konvergeret*. Denne kontrol udføres i forhold til et *stopkriterium*.

Udjævningen er konvergeret når højre side af normalligningssystemet, det vil sige $\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{b}$, er nul. Et andet kriterium for at stoppe udjævningen kan være, at tilvæksterne $\hat{\mathbf{x}}$ skal være mindre end en vis størrelse. Dette er rimeligt, da små tilvækster betyder, at de foreløbige værdier for elementerne og elementerne er tæt på hinanden.



Figur 3.2: Iterativ løsning af udjævningsproblem.

Eksempel 3.4 Fortsat fra eksempel 3.3. Nu gennemføres udjævningen ved indsættelse af numeriske værdier i de lineariserede observationsligninger (3.12). De tre afstandsobservationer er givet i eksempel 3.1 på side 63 i

(Borre, 1992)

$$b_1 = 100.01$$

$$b_2 = 100.02$$

$$b_3 = 100.03.$$

De foreløbige koordinater til de fire punkter fremgår af figur 3.2 i (Borre, 1992)

$$Y_1^0 = 270.71$$

$$X_1^0 = 170.71$$

$$Y_2^0 = 100.00$$

$$X_2^0 = 100.00$$

$$Y_3^0 = 100.00$$

$$X_3^0 = 241.42$$

$$Y_P^0 = 170.71$$

$$X_P^0 = 170.71.$$

Observationsligningerne er givet ved (3.12)

$$\begin{bmatrix} b_1 - b_1^0 \\ b_2 - b_2^0 \\ b_3 - b_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{1Y_P} & j_{1X_P} \\ j_{2Y_P} & j_{2X_P} \\ j_{3Y_P} & j_{3X_P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Y_P - Y_P^0) \\ (X_P - X_P^0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \hat{r}_3 \end{bmatrix},$$

og de partielt afledede er givet i (3.9). Ved indsættelse af de partielt afledede fås

$$\begin{bmatrix} b_1 - b_1^0 \\ b_2 - b_2^0 \\ b_3 - b_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_P^0 - Y_1^0}{b_1^0} & \frac{X_P^0 - X_1^0}{b_1^0} \\ \frac{Y_P^0 - Y_2^0}{b_2^0} & \frac{X_P^0 - X_2^0}{b_2^0} \\ \frac{Y_P^0 - Y_3^0}{b_3^0} & \frac{X_P^0 - X_3^0}{b_3^0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Y_P - Y_P^0) \\ (X_P - X_P^0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \hat{r}_3 \end{bmatrix}.$$

Observationerne svarende til de foreløbige koordinater er givet ved

$$b_i^0 = \sqrt{(Y_i^0 - Y_P^0)^2 + (X_i^0 - X_P^0)^2}.$$

Når de foreløbige værdier indsættes bestemmes ligningssystemet til

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{r}}$$

$$\begin{bmatrix} 100.01 - 100.000 \\ 100.02 - 99.999 \\ 100.03 - 99.999 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.000 & 0.000 \\ 0.707 & 0.707 \\ 0.707 & -0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Y_P - Y_P^0) \\ (X_P - X_P^0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \hat{r}_3 \end{bmatrix}.$$

Normalligningssystemet er givet ved (2.19). Husk, at $\mathbf{C}$ blot er enhedsmatricen.

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A}) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 2.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Y_P - Y_P^0) \\ (X_P - X_P^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.027 \\ -0.007 \end{bmatrix},$$

og mindste kvadraters estimat for koordinattilvæksterne bliver (2.20)

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}^1 &= (\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{b} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{y}_P \\ \hat{x}_P \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.013 \\ -0.007 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Koordinattilvæksterne er angivet med små bogstaver. De foreløbige koordinater til punkt P opdateres til et nyt sæt foreløbige koordinater

$$\begin{aligned}Y_P^1 &= Y_P^0 + \hat{y}_P = 170.71 + 0.013 = 170.723 \\ X_P^1 &= X_P^0 + \hat{x}_P = 170.71 - 0.007 = 170.703.\end{aligned}$$

Højresiden af normalligningerne er $\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.027 \\ -0.007 \end{bmatrix}$ og koordinattilvæksterne er $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0.013 \\ -0.007 \end{bmatrix}$. Udjævningen er derfor ikke konvergeret, og endnu en iteration beregnes.

Observationsligningerne opstilles påny udfra de nye foreløbige koordinater

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{r}} \\ \begin{bmatrix} 100.01 - 99.987 \\ 100.02 - 100.004 \\ 100.03 - 100.014 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1.000 & 0.000 \\ 0.707 & 0.707 \\ 0.707 & -0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Y_P - Y_P^1) \\ (X_P - X_P^1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \hat{r}_3 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Normalligningerne bliver nu

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A}) \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{b} \\ \begin{bmatrix} 2.000 & 0.000 \\ 0.000 & 2.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Y_P - Y_P^1) \\ (X_P - X_P^1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.165 \\ -0.349 \end{bmatrix} \times 10^{-5},\end{aligned}$$

og de estimerede koordinattilvækster

$$\hat{\mathbf{x}}^2 = \begin{bmatrix} 0.082 \\ -0.349 \end{bmatrix} \times 10^{-5}.$$

Koordinattilvæksterne og højresiden af normalligningerne er nu meget små, hvorfor udjævningen er konvergeret. Det endelige estimat for koordinaterne til punkt P er

$$\begin{aligned}Y_P &= Y_P^1 + \hat{y}_P = 170.723 + 0.082 \times 10^{-5} = 170.723 \\ X_P &= X_P^1 + \hat{x}_P = 170.703 - 0.349 \times 10^{-5} = 170.703.\end{aligned}$$

Efter endt udjævning bestemmes residualerne efter (2.21)

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \\ &= \begin{bmatrix} -1.000 & -0.000 \\ 0.707 & 0.707 \\ 0.707 & -0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.082 \\ -0.349 \end{bmatrix} \times 10^{-5} - \begin{bmatrix} 100.01 - 99.987 \\ 100.02 - 100.004 \\ 100.03 - 100.014 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.023 \\ -0.017 \\ -0.017 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

De estimerede observationer $\hat{\mathbf{b}}$ er i følge (1.1) givet ved

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{b}} &= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \hat{r}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 100.01 \\ 100.02 \\ 100.03 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.023 \\ -0.017 \\ -0.017 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 99.987 \\ 100.003 \\ 100.013 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Punkt P kan bestemmes ved bueskæring på tre forskellige måder ud fra de tre observationer. Ved at bruge de estimerede observationer $\hat{\mathbf{b}}$ får koordinaterne til P de samme værdier ligegyldigt hvilke af de tre observationer, der anvendes. Mindste kvadraters estimat for koordinaterne sikrer altså en entydig bestemmelse af modellen. $\diamond$

3.3 Opgaver

Opgave 3.1 Hvor stor bliver fejlen, hvis den foreløbige værdi i eksempel 3.1 vælges som $x^0 = 1$?

Opgave 3.2 Gennemregn eksempel 3.4 frem til første estimat for koordinaterne til punkt P er bestemt. Gennemfør regningerne med lommeregner. For at bestemme $\hat{\mathbf{x}}$, skal normalligningerne $(\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A})$ inverteres. Da normalligningsmatricen kun har elementer på diagonalen, har den inverterede matrix også kun elementer på diagonalen. Det enkelte element i den inverterede matrix findes som den reciprokke af det tilsvarede element i normalligningsmatricen.

Opgave 3.3 De tre observationer i eksempel 3.4 antages nu at have spredningerne $\sigma_1 = 0.010$, $\sigma_2 = 0.020$ og $\sigma_3 = 0.015$. Opstil vægtmatricen $\mathbf{C}$ og gennemregn eksemplet med Matlab. Bestem de endelige koordinater til punkt P . Beregn residualerne og de estimerede observationer.

Kapitel 4

Vurdering af udjævning I

Efter endt udjævning er mindste kvadraters estimat for de ubekendte elementer fundet. Det er muligt at beregne residualerne og de korrigerede observationer. Den underliggende model er tilfredsstillet, og mindste kvadraters princip er opfyldt, ganske som det blev krævet i afsnit 2.1. Spørgsmålet er nu, hvor god den fundne løsning er; hvor store er spredningerne på de fundne elementer?, gik alt som forventet under udjævningen?, hvordan vurderes en udjævning i det hele taget? Kapitlet forsøger at besvare disse spørgsmål.

4.1 A posteriori variansfaktor

Efter endt udjævning kan residualerne beregnes efter (2.21). Variansfaktoren σ_0^2 kan nu estimeres som

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{r}}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{r}}}{m - n}. \quad (4.1)$$

Inden udjævningen påbegyndes, opstilles vægtmatricen $\mathbf{C}$. Hvert diagonalelement bestemmes efter *vægtrelationen* (2.8)

$$c_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}.$$

Variansfaktoren er før udjævningen ukendt, hvorfor den sættes lig 1. Hver vægt er derfor a priori bestemt som

$$c_i = \frac{1}{\sigma_i^2}.$$

Efter udjævningen giver (4.1) et a posteriori estimatet for σ_0^2 og det kan vurderes, om a posteriori estimatet ligesom a priori værdien er lig 1. Hvis

udjævningen er forløbet tilfredsstillende, er værdien af $\hat{\sigma}_0^2$ nær 1. Hvis dette ikke er tilfældet, kan det skyldes,

- at observationerne a priori er vægtet forkert, det vil sige, at den stokastiske model ikke er korrekt, jævnfør kapitel 1.
- at den funktionelle model ikke er korrekt, jævnfør kapitel 1.
- at observationerne ikke er normalfordelte.

Kapitel 6 beskriver hvordan disse situationer behandles. I dette kapitel gives kun en forenklet tolkning af første situation.

Vægtrelationen kan omskrives til

$$\sigma_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{c_i}. \quad (4.2)$$

Ved at indsætte $\hat{\sigma}_0^2$ i stedet for σ_0^2 i (4.2) kan det afgøres, om observationernes varianser ændres som følge af at bruge $\hat{\sigma}_0^2$ i stedet for σ_0^2 .

Når $\hat{\sigma}_0^2$ er 1, er a priori værdien og a posteriori estimatet ens og observationernes varianser ændres ifølge (4.2) ikke. Dette betyder altså, at observationernes varianser og dermed også vægte er korrekte. Hvis $\hat{\sigma}_0^2$ er større end 1, bliver observationernes varianser ifølge (4.2) også større. Dette betyder, at de varianser, der blev givet observationerne før udjævningen, er for små. Hvis for eksempel $\hat{\sigma}_0^2$ er 2, er observationernes varianser kun det halve af, hvad de bør være. Omvendt, hvis $\hat{\sigma}_0^2$ er mindre end 1, er observationernes varianser a priori valgt for store.

Ofte indgår flere forskellige typer observationer i en udjævning. I landmåling er det ofte retninger, afstande, højdeforskelle, koordinater og GPS vektorer. Hvis en udjævning af disse observationstyper resulterer i, at $\hat{\sigma}_0^2$ bliver 2, indikerer dette, at observationerne a priori er givet for små spredninger. Det er imidlertid ikke sikkert, at alle observationer er vægtet forkert. Der er derfor ikke garanti for, at hvis alle spredninger fordobles, bliver $\hat{\sigma}_0^2$ 1. Når blot en enkel type observationer er vægtet forkert, smitter dette af på $\hat{\sigma}_0^2$. Denne problematik behandles ydeligere i kapitel 6.

Eksempel 4.1 Eksempel 2.7 fortsat. Nivellementsnettet er nu udjævnet og

residualerne bestemmes efter (2.21)

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.933 \\ 9.030 \\ 5.824 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6.923 \\ 1.115 \\ -5.825 \\ 2.097 \\ 3.203 \\ 9.036 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.010 \\ -0.006 \\ 0.001 \\ 0.000 \\ 0.003 \\ -0.006 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Dernæst bestemmes variansfaktoren efter (4.1)

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\hat{\mathbf{r}}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{r}}}{m - n} \\ &= \frac{1.106}{6 - 3} \\ &= 0.369.\end{aligned}$$

Variansfaktoren er mindre en 1, hvorfor observationernes a priori spredninger er for store. I stedet for at anvende en kilometerspredning på $5 \text{ mm km}^{-0.5}$ bør kilometerspredningen måske være $3 \text{ mm km}^{-0.5}$. $\diamond$

Eksempel 4.2 Fortsat fra eksempel 3.4. Variansfaktoren for bueskærings-eksemplet beregnes efter (4.1)

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\hat{\mathbf{r}}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{r}}}{m - n} \\ &= \frac{0.001}{3 - 2} \\ &= 0.001.\end{aligned}$$

Da afstandsobservationerne er observeret med ens præcision, er vægtmatricen $\mathbf{C}$ identisk med enhedmatricen $\mathbf{I}$. Dette er ensbetydende med, at observationerne a priori er givet varianser på 1 m. Dette skyldes, at observationernes enhed er meter. Det meget lille estimat for variansfaktoren viser, at dette er alt for store a priori varianser. Kvadratroden af variansfaktoren er $\hat{\sigma}_0 = 0.033$. Observationernes a priori spredninger er derfor nærmere 0.033 m i stedet for 1 m. $\diamond$

4.2 A posteriori varians

For at bestemme varianserne for de estimerede størrelser, det vil sige elementer og residualer, anvendes den generelle fejlforplantningslov. Fejlforplantningsloven udledes ikke her, men repeteres blot. Vektoren $\mathbf{y}$ er en lineær funktion af en anden vektor $\mathbf{x}$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (4.3)$$

Hvis for eksempel både $\mathbf{y}$ og $\mathbf{x}$ indeholder 2 elementer er (4.3) fuldt udskrevet

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kovariansmatricen for $\mathbf{x}$ er kendt og kaldes Σ_x . Kovariansmatricen for $\mathbf{y}$ kan nu bestemmes ifølge den generelle fejlforplantningslov

$$\Sigma_y = \mathbf{A}\Sigma_x\mathbf{A}^T. \quad (4.4)$$

Eksempel 4.3 Afstandene i en polygon med fire sider er målt. Målingerne er uafhængige. De fire observationer er $b_1 = 461.825$, $b_2 = 215.623$, $b_3 = 117.221$ og $b_4 = 512.338$. De tilsvarende spredninger er $\sigma_1 = 0.021$, $\sigma_2 = 0.017$, $\sigma_3 = 0.010$ og $\sigma_4 = 0.025$. Nu bestemmes spredningen på den samlede afstand, y . Da observationerne er uafhængige, kan spredningen findes ved hjælp af den simple fejlforplantningslov. Afstanden er givet ved

$$\begin{aligned} y &= b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \\ &= 461.825 + 215.623 + 117.221 + 512.338 \\ &= 1307.007, \end{aligned}$$

og variansen på afstanden er givet ved

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 \\ &= (0.021)^2 + (0.017)^2 + (0.010)^2 + (0.025)^2 \\ &= 0.0015. \end{aligned}$$

Nu findes variansen ved hjælp af den generelle fejlforplantningslov. Den sam-

lede afstand kan udtrykkes som

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{A}\mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 461.825 \\ 215.623 \\ 117.221 \\ 512.338 \end{bmatrix} \\ &= 1307.007. \end{aligned}$$

Kovariansmatricen for afstanden er givet ved (4.4)

$$\begin{aligned} \Sigma_y &= \mathbf{A}\Sigma_x\mathbf{A}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (0.021)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (0.017)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (0.010)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (0.025)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 0.0015. \end{aligned}$$

Der fås samme resultat som ved brug af den simple fejlforplantningslov. Spredningen på afstanden er $\sigma_y = \sqrt{0.0015} = 0.039$. $\diamond$

4.2.1 A posteriori varians for elementer

Elementerne bestemmes udfra (2.20)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{b} \\ &= \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{b}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

For at bestemme kovariansmatricen for elementerne tages udgangspunkt i denne ligning, der først skrives mere kompakt som

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t},$$

hvor $\mathbf{t} = \mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{b}$. Nu bruges først fejlforplantningsloven på $\mathbf{t}$, der opstilles på samme form som (4.3)

$$\underbrace{\mathbf{t}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\mathbf{A}^T\mathbf{C}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\mathbf{b}}_{\mathbf{x}}.$$

Kovariansmatricen for $\mathbf{b}$ er kendt i forvejen; denne er kovariansmatricen for observationerne. Kovariansmatricens for $\mathbf{t}$ er nu givet ved

$$\begin{aligned}\Sigma_t &= (\mathbf{A}^T \mathbf{C}) \Sigma_b (\mathbf{A}^T \mathbf{C})^T \\ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{C}) \Sigma_b (\mathbf{C}^T \mathbf{A}) \\ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{C}) \Sigma_b (\mathbf{C} \mathbf{A})\end{aligned}$$

Da $\mathbf{C}$ er symmetrisk om diagonalen er $\mathbf{C}$ og $\mathbf{C}^T$ ens. Ifølge (2.9) gælder $\mathbf{C} = \sigma_0^2 \Sigma_b^{-1}$, hvorfor Σ_t videre kan bestemmes som

$$\begin{aligned}\Sigma_t &= (\mathbf{A}^T \mathbf{C}) \Sigma_b (\sigma_0^2 \Sigma_b^{-1} \mathbf{A}) \\ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{C}) \Sigma_b \sigma_0^2 \Sigma_b^{-1} \mathbf{A} \\ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{C}) \sigma_0^2 \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \sigma_0^2 \\ &= \mathbf{N} \sigma_0^2\end{aligned}$$

Nu bestemmes kovariansmatricen for elementerne, $\Sigma_{\hat{x}}$. Ligning (4.5) opstilles på samme form som (4.3).

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{b} \\ \underbrace{\hat{\mathbf{x}}}_{\mathbf{y}} &= \underbrace{\mathbf{N}^{-1}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\mathbf{t}}_{\mathbf{x}}.\end{aligned}$$

Kovariansmatricen for elementerne kan nu bestemmes som

$$\begin{aligned}\Sigma_{\hat{x}} &= (\mathbf{N}^{-1}) \Sigma_t (\mathbf{N}^{-1})^T \\ &= (\mathbf{N}^{-1}) \Sigma_t (\mathbf{N}^{-1}) \\ &= (\mathbf{N}^{-1}) \sigma_0^2 \mathbf{N} (\mathbf{N}^{-1}) \\ &= \mathbf{N}^{-1} \sigma_0^2 \mathbf{N} \mathbf{N}^{-1} \\ &= \sigma_0^2 \mathbf{N}^{-1}.\end{aligned}$$

A posteriori kovariansmatricen for elementerne er altså givet ved den inverse normalligningsmatrix multipliceret med σ_0^2 . Efter udjævning kan $\hat{\sigma}_0^2$ imidlertid bestemmes ved hjælp af (4.1), og denne bruges i stedet for σ_0^2 ved beregning af kovariansmatricen

$$\Sigma_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{N}^{-1}. \quad (4.6)$$

Bemærk, at observationerne ikke indgår i bestemmelsen af kovariansmatricen! Observationerne påvirker ganske vist $\hat{\sigma}_0^2$ via residualerne, men denne

påvirkning resulterer i, at hele kovariansmatricen skales ved multiplikationen med $\hat{\sigma}_0^2$. Store residualer på enkelte observationer påvirker altså ikke specifikt de punkter, observationerne forbinder. Kovariansmatricen er et udtryk for geometrien i udjævningen ($\mathbf{N}^{-1}$) og målenøjagtigheden ($\hat{\sigma}_0^2$).

Eksempel 4.4 Fortsat fra eksempel 4.1. Kovariansmatricen for de udjævnede koter bestemmes efter (4.6)

$$\begin{aligned}\Sigma_{\hat{x}} &= \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{N}^{-1} \\ &= 0.369 \begin{bmatrix} 18848.198 & -5970.149 & -8000.000 \\ -5970.149 & 25168.658 & -13793.103 \\ -8000.000 & -13793.103 & 36607.918 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= 0.369 \begin{bmatrix} 7.658 & 3.445 & 2.972 \\ 3.445 & 6.557 & 3.223 \\ 2.972 & 3.223 & 4.595 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \\ &= \begin{bmatrix} 2.822 & 1.270 & 1.095 \\ 1.270 & 2.416 & 1.188 \\ 1.095 & 1.188 & 1.694 \end{bmatrix} \times 10^{-5}.\end{aligned}$$

Endelig bestemmes spredningerne for de estimerede koter

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{H_B} &= \sqrt{2.822 \times 10^{-5}} = 0.005 \\ \hat{\sigma}_{H_C} &= \sqrt{2.416 \times 10^{-5}} = 0.005 \\ \hat{\sigma}_{H_D} &= \sqrt{1.694 \times 10^{-5}} = 0.004.\end{aligned}$$

Alle pladser i $\Sigma_{\hat{x}}$ er besat. Varianserne står på diagonalen, og uden for står kovarianserne. Efter endt udjævning er elementerne derfor korrelerede!

◇

Eksempel 4.5 Eksempel 4.2 fortsat. Kovariansmatricen for punkt P bestemmes

$$\begin{aligned}\Sigma_{\hat{x}} &= \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{N}^{-1} \\ &= 0.001 \begin{bmatrix} 2.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= 0.001 \begin{bmatrix} 0.500 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.545 & 0.000 \\ 0.000 & 1.091 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.\end{aligned}$$

Spredningerne for koordinaterne til punkt P er

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{Y_P} &= \sqrt{0.545 \times 10^{-3}} = 0.023 \\ \hat{\sigma}_{X_P} &= \sqrt{1.091 \times 10^{-3}} = 0.033.\end{aligned}$$

◇

4.2.2 A posteriori varians for residualer

Residualerne kan beregnes efter (2.21). Udtrykket omskrives ved hjælp af (2.20) til

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \\ &= \mathbf{A} \underbrace{\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{b}}_{\hat{\mathbf{x}}} - \mathbf{b} \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C} - \mathbf{I})\mathbf{b} \\ &= -(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C})\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Residualerne er givet på samme form som (4.3)

$$\underbrace{\hat{\mathbf{r}}}_{\mathbf{y}} = - \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C})}_{\mathbf{A}} \underbrace{\mathbf{b}}_{\mathbf{x}}$$

og kovariansmatricen bestemmes ved hjælp af fejlforplantningsloven.

$$\begin{aligned}\Sigma_{\hat{\mathbf{r}}} &= [- (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C})] \Sigma_b [- (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C})]^T \\ &= [- (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C})] \sigma_0^2 \mathbf{C}^{-1} [- (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C})]^T \\ &= \sigma_0^2 [- (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C})] \mathbf{C}^{-1} [- (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C})]^T.\end{aligned}$$

Når udtrykket $\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C}$ udregnes fås en idempotent matrix. En idempotent matrix $\mathbf{H}$ har den egenskab, at den er lig sig selv kvadreret; $\mathbf{H} = \mathbf{H}^2$. På grund af denne egenskab kan udtrykket for kovariansmatricen reduceres til

$$\begin{aligned}\Sigma_{\hat{\mathbf{r}}} &= \sigma_0^2 (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \\ &= \sigma_0^2 (\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T).\end{aligned}$$

Efter udjævningen anvendes $\hat{\sigma}_0^2$ i stedet for σ_0^2 , hvorfor a posteriori kovariansmatricen for residualerne bestemmes som

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{r}}} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T). \quad (4.7)$$

Eksempel 4.6 I eksempel 4.1 blev residualerne og variansfaktoren for nivellementsnettet bestemt. Kovariansmatricen for residualerne er givet ved

$$\begin{aligned}\Sigma_{\hat{r}} &= \hat{\sigma}_0^2(\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T) \\ &= 0.367 \left(\begin{bmatrix} 4878.049 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8000.000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14814.815 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5970.149 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13793.103 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5405.405 \end{bmatrix}^{-1} \right. \\ &\quad - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18848.198 & -5970.149 & -8000.000 \\ -5970.149 & 25168.658 & -13793.103 \\ -8000.000 & -13793.103 & 36607.918 \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \left. \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 4.733 & 1.727 & -1.095 & -1.553 & 0.174 & 1.270 \\ 1.727 & 2.281 & -0.598 & 1.645 & -0.680 & -0.082 \\ -1.095 & -0.598 & 0.794 & 0.093 & -0.506 & 1.188 \\ -1.553 & 1.645 & 0.093 & 3.473 & -1.054 & -1.147 \\ 0.174 & -0.680 & -0.506 & -1.054 & 0.938 & -1.229 \\ 1.270 & -0.082 & 1.188 & -1.147 & -1.229 & 4.401 \end{bmatrix} \times 10^{-5}.\end{aligned}$$

◇

Eksempel 4.7 I fortsættelse af eksempel 3.4 og eksempel 4.2 bestemmes residualernes kovariansmatrix

$$\begin{aligned}\Sigma_{\hat{r}} &= \hat{\sigma}_0^2(\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T) \\ &= 0.001 \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}^{-1} - \begin{bmatrix} -1.000 & 0.000 \\ 0.707 & 0.707 \\ 0.707 & -0.707 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. \begin{bmatrix} 2.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1.000 & 0.707 & 0.707 \\ 0.000 & 0.707 & -0.707 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0.546 & 0.386 & 0.386 \\ 0.386 & 0.273 & 0.273 \\ 0.386 & 0.273 & 0.273 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.\end{aligned}$$

◇

I de to sidste eksempler står residualernes varianser på diagonalerne i kovariansmatricerne. Kovarianserne udenfor diagonalerne er ikke nul, hvorfor residualerne ikke er uafhængige.

4.3 Normaliserede residualer

Efter endt udjævning kan residualerne bestemmes ved (2.21). Spørgsmålet er nu, om residualerne har de forventede størrelser. Dette er svært at afgøre ved blot at se på de absolutte residualer. Er det for eksempel rimeligt, at en afstandsobservation på 200 m med en spredning på 1 cm får et residual på 2 cm? I stedet for at se på de absolutte residualer indføres en relativ størrelse, der kaldes *normaliserede residualer*. Normaliserede residualer er standard normalfordelt og kan derfor direkte sammenlignes. A posteriori kovariansmatricen for residualerne er givet ved (4.7). Ved at dividere residualerne med deres spredninger bestemmes de normaliserede residualer. Det normaliserede residual for den i 'te observation er derfor givet ved

$$r'_i = \frac{\hat{r}_i}{\sqrt{\hat{\sigma}_{r_i}^2}}. \quad (4.8)$$

Residualernes varianser står på diagonalen i $\Sigma_{\hat{r}}$. Det normaliserede residual for den i 'te observation er residualet divideret med kvadratroden af det i 'te diagonalelement i $\Sigma_{\hat{r}}$, der benævnes $\hat{\sigma}_{r_i}^2$. Nævneren i (4.8) er spredningen på residualet. Hvis r'_i er 1, har residualet en størrelse, der svarer til spredningen. Hvis r'_i er mindre end 1, er residualet mindre end spredningen, og endelig hvis r'_i er større end 1, er residualet større end spredningen. Når det normaliserede residual er 1 har residualet altså en størrelse, der er lig spredningen. Når r'_i er 2 og når r'_i er 3, er residualet lig henholdsvis to gange spredningen og tre gange spredningen. Sandsynligheden for at en hændelse er længere væk fra middelværdien end 3σ er kun 0.3 %. Normalt betragtes så yderlige observationer som grove fejl. Et normaliseret residual med værdien 3 eller større kan derfor være et fingerpeg om, at observationen er behæftet med en grov fejl. Et lille normaliseret residual kan imidlertid også være tegn på, at nettet er svagt bestemt, jævnfør afsnit 6.3.

Eksempel 4.8 Fortsat fra eksempel 4.6. De normaliserede residualer for

nivellementseksemplet bestemmes ifølge (4.8)

$$r'_1 = \frac{-0.010}{\sqrt{4.733^{-5}}} = -1.4$$

$$r'_2 = \frac{-0.006}{\sqrt{2.281^{-5}}} = -1.3$$

$$r'_3 = \frac{0.001}{\sqrt{0.794^{-5}}} = 0.3$$

$$r'_4 = \frac{0.000}{\sqrt{3.473^{-5}}} = 0.0$$

$$r'_5 = \frac{0.003}{\sqrt{0.938^{-5}}} = 0.8$$

$$r'_6 = \frac{-0.006}{\sqrt{4.401^{-5}}} = -1.0.$$

De normaliserede residualer har samme fortegn som de tilsvarende residualer, hvilket blot angiver, om den korrigerede observation er større eller mindre end den tilsvarende oprindelige observation. Ingen af de normaliserede residualer er mindre end -3 eller større end $+3$, hvorfor observationerne næppe er behæftede med grove fejl. $\diamond$

Eksempel 4.9 Fortsat fra eksempel 4.7. De normaliserede residualer for bueskæringseksemplet bestemmes

$$r'_1 = \frac{-0.023}{\sqrt{0.546^{-3}}} = -1.0$$

$$r'_2 = \frac{-0.017}{\sqrt{0.273^{-3}}} = -1.0$$

$$r'_3 = \frac{-0.017}{\sqrt{0.273^{-3}}} = -1.0.$$

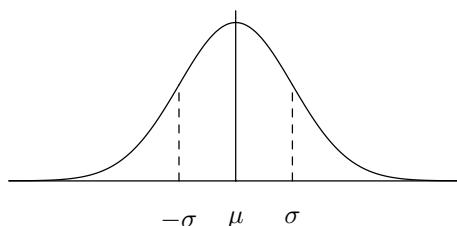
I dette eksempel, hvor alle normaliserede residualer er -1 , svarer residualernes størrelser altså til det forventede. $\diamond$

4.4 Konfidensellipser

Efter endt udjævning er der ofte estimeret koordinater til en række punkter. Koordinaternes præcision kan vurderes ved at studere den tilhørende kovariansmatrix, $\Sigma_{\hat{x}}$. De færreste er imidlertid i stand til at konkludere noget udfra de mange tal i matricen. I stedet er en grafisk illustration af præcisionsforholdene lettere at overskue. Ved hvert punkt kan tegnes en *konfidensellipse*, hvis størrelse, orientering og form fortæller om punktets præcision. Konfidensellipser bruges oftets til at vise præcisionsforholdene i det horisontale

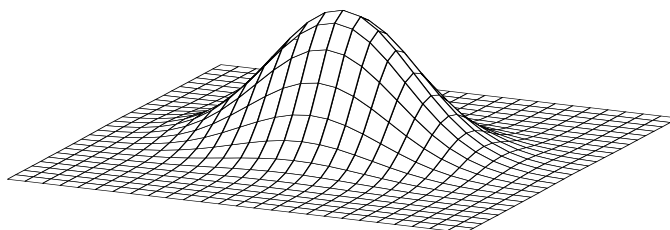
plan, det vil sige i to dimensioner. Der er dog intet til hinder for at udvide anvendelsen til tre dimensioner, så der bliver tale om *konfidensellipsoider*. Der ses her på det todimensionale tilfælde.

Fejlene, der knytter sig til elementerne, antages oftest at være normalfordelte. I én dimension er tæthedsfunktionen givet ved den velkendte normalfordelingskurve.



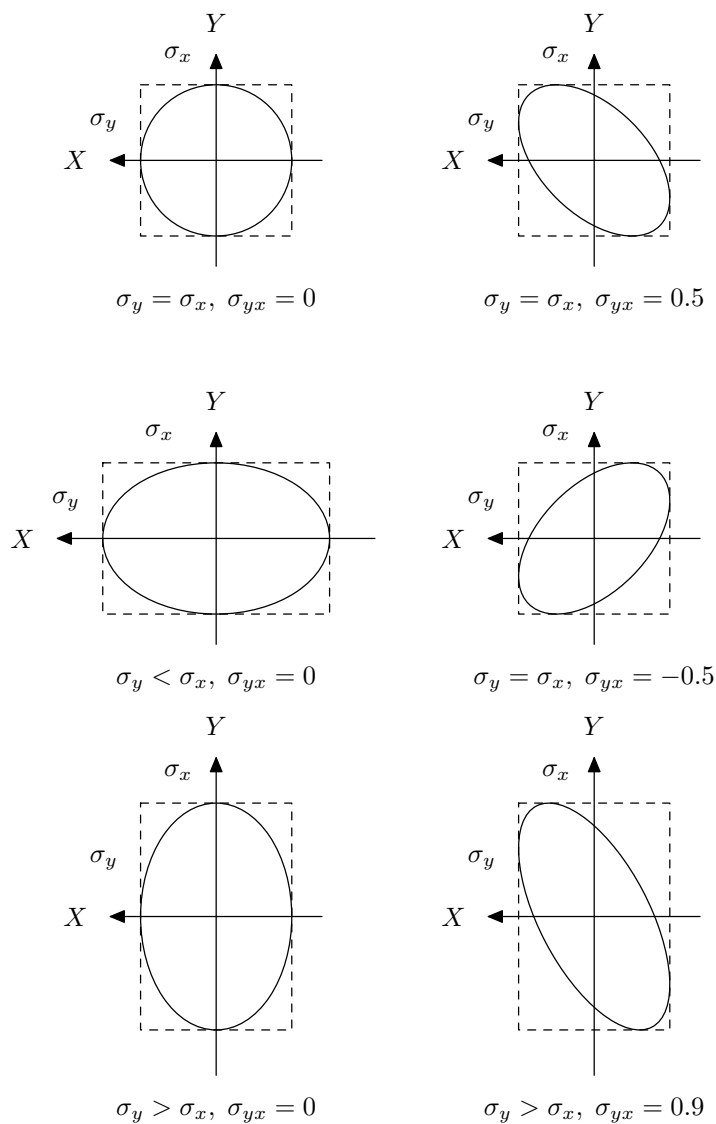
Figur 4.1: Endimensional normalfordeling.

Den todimensionale tæthedsfunktion er illustreret i figur 4.2. Et hvert lodret plan der skærer tæthedsfunktionen beskriver en endimensional tæthedsfunktion. Ethvert plan parallelt med yx -planet skærer tæthedsfunktionen i en ellipse.



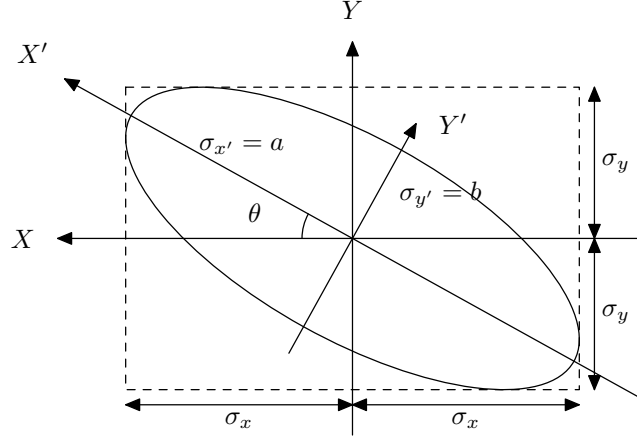
Figur 4.2: Todimensional normalfordeling.

For hvert punkt kan en sådan *konfidensellipse* bestemmes. Ellipsen tegnes med centrum i punktet. Konfidensellipsens størrelse, form og orientering bestemmes af koordinaternes varianser samt kovariansen mellem dem. Konfidensellipsen knyttet til punkt (y, x) bestemmes altså af σ_y^2 , σ_x^2 og σ_{yx} . Konfidensellipser bestemmes ud fra elementerne i kovariansmatricen, der netop indeholder information om punkternes præcision. Figur 4.3 viser seks eksempler på, hvordan varianserne og kovarianserne påvirker ellipserne.



Figur 4.3: Eksempler på konfidensellipser.

En typisk konfidensellipse er vist i figur 4.4. En kasse med sidelængden $2\sigma_y$ i y -aksens retning og $2\sigma_x$ i x -aksens retning er tegnet om konfidensellipsen. Konfidensellipsen, der begrænses af en kasse med disse dimensioner, kaldes *standardkonfidensellipsen*.



Figur 4.4: Standardkonfidensellipse.

Generelt vil akserne i ellipsen Y' , X' ikke være parallelle med koordinatsystemets akser Y , X . Storaksen i ellipsen X' danner vinklen θ med koordinatsystemets X -akse. En position i YX systemet kaldes $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$. Den samme position udtrykt i $Y'X'$ systemet benævnes $\begin{bmatrix} y' \\ x' \end{bmatrix}$. Positionen kan udtrykkes i $Y'X'$ systemet ved en konform transformation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y' \\ x' \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}. \quad (4.9)$$

Kovariansmatricerne for positionen i de to systemer er

$$\Sigma_{YX} = \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{yx} \\ \sigma_{yx} & \sigma_x^2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \Sigma_{Y'X'} = \begin{bmatrix} \sigma_{y'}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{x'}^2 \end{bmatrix}.$$

Kovariansmatricen for YX systemet er resultat af udjævningen. Kovarianserne i $Y'X'$ systemet er nul, da y' og x' er ukorrelerede. Dette skyldes, at i det roterede $Y'X'$ system er koordinataksene sammenfaldende med ellipsens akser. Ligning (4.9) er på samme form som (4.3). Kovariansmatricen for positionen i $Y'X'$ systemet kan derfor bestemmes ved hjælp af den generelle fejlforplantningslov (4.4)

$$\begin{aligned} \Sigma_{Y'X'} &= \mathbf{A} \Sigma_{YX} \mathbf{A}^T \\ \begin{bmatrix} \sigma_{y'}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{x'}^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{yx} \\ \sigma_{yx} & \sigma_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{yx} \\ \sigma_{yx} & \sigma_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ved at gange matricerne ud fås

$$\sigma_{x'}^2 = \sigma_y^2 \sin^2 \theta + \sigma_x^2 \cos^2 \theta + 2\sigma_{yx} \sin \theta \cos \theta \quad (4.10)$$

$$\sigma_{y'}^2 = \sigma_y^2 \cos^2 \theta + \sigma_x^2 \sin^2 \theta - 2\sigma_{yx} \sin \theta \cos \theta \quad (4.11)$$

$$0 = (\sigma_y^2 - \sigma_x^2) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{yx}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \quad (4.12)$$

Ved at indsætte $(\frac{1}{2} \sin 2\theta)$ i stedet for $(\sin \theta \cos \theta)$ og $(\cos 2\theta)$ i stedet for $(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$ i ligning (4.12) fås

$$0 = \frac{1}{2}(\sigma_y^2 - \sigma_x^2) \sin 2\theta + \sigma_{yx} \cos 2\theta,$$

hvorfra vinklen θ kan udledes

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{yx}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}. \quad (4.13)$$

Efter vinklen θ er bestemt, skal der eventuelt lægges 100 gon eller 200 gon til denne afhængig af tællerens og nævnerens fortegn i (4.13).

	Tæller > 0	Tæller < 0
Nævner > 0	$\theta = \theta + 0 \text{ gon}$	$\theta = \theta + 200 \text{ gon}$
Nævner < 0	$\theta = \theta + 100 \text{ gon}$	$\theta = \theta + 100 \text{ gon}$

Ved at eliminere θ fra (4.10) og (4.11) fås følgende udtryk for $\sigma_{x'}$ og $\sigma_{y'}$.

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} = a &= \sqrt{\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2}{4} + \sigma_{yx}^2}} \\ \sigma_{y'} = b &= \sqrt{\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2}{4} + \sigma_{yx}^2}}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

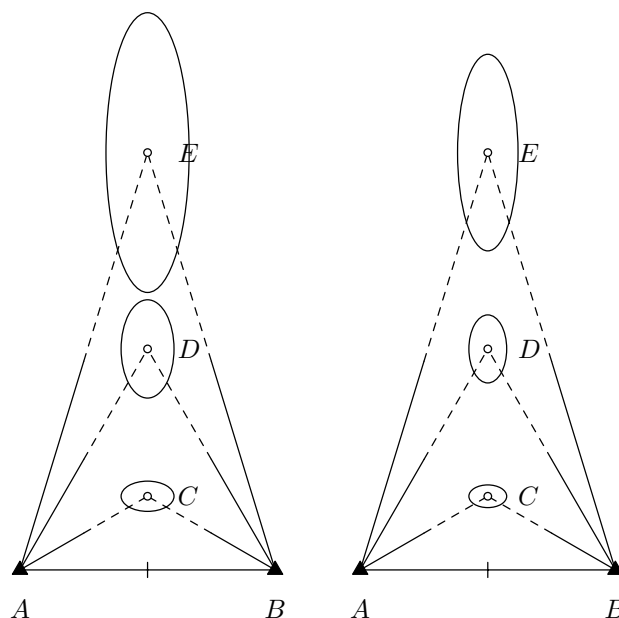
Spredningerne $\sigma_{x'} = a$ og $\sigma_{y'} = b$ er henholdsvis halve storakse og halve lille akse i standardkonfidensellipsen. Udfra de fundne størrelser kan konfidensellipsen tegnes.

Ved den endimensionale normalfordeling er sandsynligheden cirka 68 % for, at den estimerede værdi ligger indenfor intervallet $\mu \pm \sigma$. Standardkonfidensellipsen er ækvivalent hertil, idet den for den todimensionale fordeling

beskriver det område, der svarer til ' $\mu \pm \sigma$ '. Sandsynligheden for at den estimerede værdi ligger inden for standardkonfidensellipsen er dog kun cirka 39 %. Ved at skalere ellipsens akser kan sandsynligheden for at den estimerede værdi falder inden for ellipsen øges eller mindskes. Hvis skaleringsfaktoren kaldes k , er denne altså $k = 1$ for standardkonfidensellipsen.

Sandsynlighed [%]	39	50	90	95	99
k	1.000	1.177	2.146	2.447	3.035

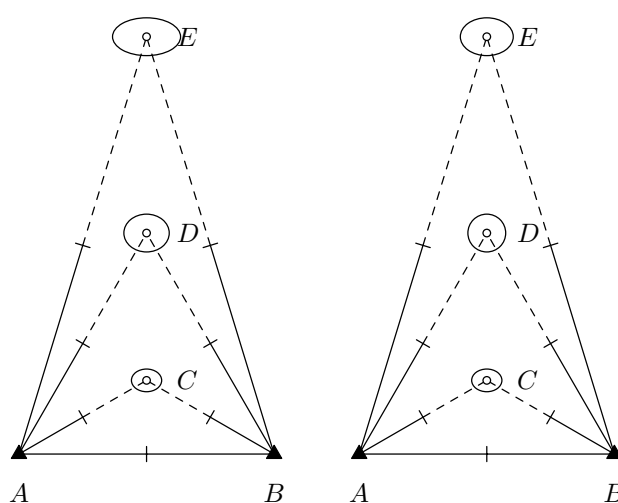
Tabel 4.1: Skaleringsfaktor og tilsvarende sandsynligheder.



Figur 4.5: Eksempel på konfidensellipser ved retningsmåling.

Figur 4.5 viser et eksempel på brug af konfidensellipser. Der er 300 meter mellem de kendte punkter A og B . I den venstre figur er der fra A og B målt retninger til henholdsvis C , D og E . Der er endvidere målt retning og afstand indbyrdes mellem A og B . Retningsspredningen er 1 mgon. Konfidensellipserne er vist i halv størrelse. Det er tydeligt, at konfidensellipserne vokser, jo spidsere skæringerne er. Konfidensellipserne vokser netop i nord-sydgående retning, da det er i denne retning, skæringerne bliver dårligere og dårligere. Ved blot at se på konfidensellipsernes størrelse, form og orientering får man

en ide på punkternes præcision. Punkt E er ikke tilfredsstillende bestemt. For at styrke bestemmelsen måles retningerne endnu en gang, så hver retning nu er målt to gange. De resulterende konfidensellipser er vist i højre figur. Konfidensellipserne er blevet mindre, men resultatet er ikke tilfredsstillende i betragtning af, at der er nu er lagt dobbelt så meget arbejde i målingen. Det skal her bemærkes, at gentagne målinger af samme størrelse altid er en god ide, da grove fejl herved kan afsløres. Udover retningsobservationerne tilføjes nu ydeligere afstandsobservationer.



Figur 4.6: Eksempel på konfidensellipser ved retnings- og afstandsmåling.

I figur 4.6 er der tilføjet afstandsobservationer, så der nu både er retnings- og afstandsobservationer. Spredningen på afstandene er 5 mm. I venstre figur er retninger målt en gang, mens de i højre figur er målt to gange. Resultaterne er næsten ens. Afstandene har styrket bestemmelsen af især punkt D og punkt E så meget, at konfidensellipsernes storakser nu er orienteret øst-vest.

Det må tilstræbes at have små og cirkulære konfidensellipser i alle punkter. Dette kan opnås ved

1. at sikre, at geometrien i nettet er god. Figur 4.5 viser hvordan spidse skæringer giver store konfidensellipser.
2. at sikre, at variansfaktoren er lille. Variansfaktoren kan mindskes ved at indføre flere overbestemmelser i udjævningen.

3. at anvende præcisionsinstrumenter, der giver små a priori spredninger.

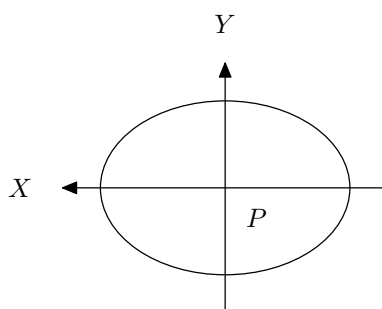
Eksempel 4.10 Fortsat fra eksempel 4.5. Standardkonfidensellipsen for punkt P bestemmes. Kovariansmatricen $\Sigma_{\hat{x}}$ er givet ved

$$\Sigma_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.545 & 0.000 \\ 0.000 & 1.091 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

Da kovarianserne er nul, bliver tælleren i (4.13) også nul. Vinkelen mellem YX systemet og $Y'X'$ systemet er derfor nul; de to systemet er parallelle. Ved indsættelse i (4.14) findes størrelserne af halve storakse og halve lilleakse

$$\sigma_{x'} = a = 0.033$$

$$\sigma_{y'} = b = 0.023.$$



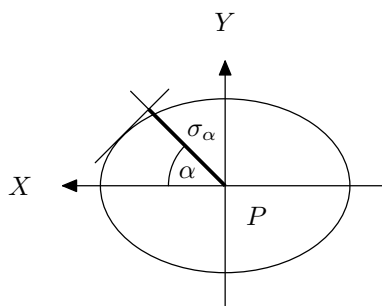
Figur 4.7: Konfidensellipse i punkt P , skala 1:2.

◇

Konfidensellipsen i et punkt giver et billede af præcisionsforholdene i punktet. Når halve storakse og halve lilleakse er bestemt kan endvidere spredningen i en hvilken som helst retning bestemmes. Spredningen i retning α i forhold til storaksen i ellipsen er givet ved

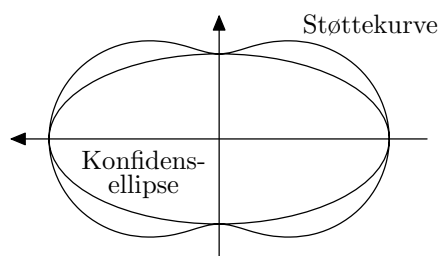
$$\sigma_{\alpha} = \sqrt{\sigma_{x'}^2 \cos^2 \alpha + \sigma_{y'}^2 \sin^2 \alpha}.$$

Hvis spredningen σ_{α} tegnes fra konfidensellipsens centrum i retningen α , findes et punkt, der *ikke* ligger på konfidensellipsen. Konfidensellipsen beskriver derfor ikke spredningen i punktet. Spredningen i en given retning kan dog bestemmes udfra konfidensellipsen ved at projicere denne ind på retningen α , se figur 4.8.



Figur 4.8: Konfidensellipse og spredning i retning α .

Når α gennemløber hele horisonten fremkommer *støttekurven*, der er vist i figur 4.9. Støttekurven beskriver spredningen i en hvilken som helst retning. Konfidensellipsen og støttekurven falder kun sammen, hvor ellipsens akser skærer ellipsen. I disse punkter er projektionen af konfidensellipsen på retningen α netop enten halve storakse eller halve lilleakse.



Figur 4.9: Konfidensellipse og støttekurve.

Eksempel 4.11 Fortsat fra eksempel 4.10. Spredningen i retningen $\alpha = 50$ gon bestemmes.

$$\begin{aligned}\sigma_{50 \text{ gon}} &= \sqrt{0.033^2 \cos^2(50 \text{ gon}) + 0.023^2 \sin^2(50 \text{ gon})} \\ &= 0.029.\end{aligned}$$

◇

4.4.1 Relative konfidensellipser

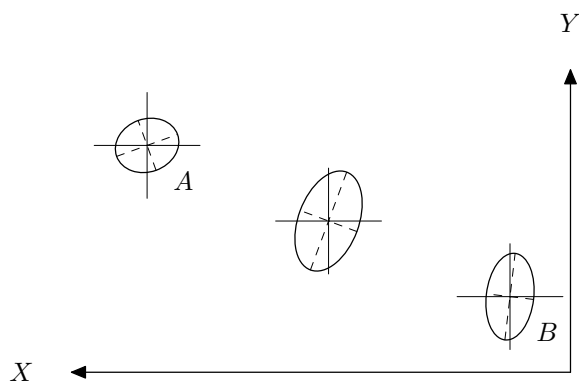
Relative konfidensellipser udtrykker den relative præcision mellem to punkter (y_i, x_i) og (y_j, x_j) . Ved at udskifte (σ_y^2) med $(\sigma_{y_i}^2 + \sigma_{y_j}^2 - 2\sigma_{y_i y_j})$, ved at udskifte (σ_x^2) med $(\sigma_{x_i}^2 + \sigma_{x_j}^2 - 2\sigma_{x_i x_j})$ og ved at udskifte (σ_{yx}) med $(\sigma_{y_i x_i} + \sigma_{y_j x_j} - \sigma_{y_i x_j} - \sigma_{y_j x_i})$ kan (4.13) og (4.14) anvendes til at bestemme relative konfidensellipser. Konfidensellipsen tegnes midt mellem punkt i og punkt j .

Eksempel 4.12 Efter endt udjævning har punkt A og punkt B fået koordinaterne $(y_A, x_A) = (15, 28)$ og $(y_B, x_B) = (5, 4)$. Kovariansmatricen for punkterne er

$$\begin{aligned} \Sigma_{\hat{x}} &= \begin{bmatrix} \sigma_{y_A}^2 & \sigma_{y_A x_A} & \sigma_{y_A y_B} & \sigma_{y_A x_B} \\ \sigma_{y_A x_A} & \sigma_{x_A}^2 & \sigma_{y_B x_A} & \sigma_{x_A x_B} \\ \sigma_{y_A y_B} & \sigma_{y_B x_A} & \sigma_{y_B}^2 & \sigma_{y_B x_B} \\ \sigma_{y_A x_B} & \sigma_{x_A x_B} & \sigma_{y_B x_B} & \sigma_{x_B}^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3.24 & -0.48 & 0.25 & 0.20 \\ -0.48 & 4.40 & 1.21 & 1.00 \\ 0.25 & 1.21 & 8.19 & -0.68 \\ 0.20 & 1.00 & -0.68 & 2.55 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Konfidensellipserne for punkt A og punkt B samt den relative konfidensellipse bestemmes udfra (4.13) og (4.14)

$$\begin{aligned} \tan 2\theta_A &= \frac{2(-0.48)}{4.40 - 3.24} = -0.83, \quad \theta_A = 178.0 \text{ gon} \\ a_A &= \sqrt{\frac{4.40 + 3.24}{2}} + \sqrt{\frac{(4.40 - 3.24)^2}{4} + (-0.48)^2} = 2.14 \\ b_A &= \sqrt{\frac{4.40 + 3.24}{2}} - \sqrt{\frac{(4.40 - 3.24)^2}{4} + (-0.48)^2} = 1.75 \\ \theta_B &= 107.5 \text{ gon} \\ a_B &= 2.88 \\ b_B &= 1.57 \\ \theta_{AB} &= 122.6 \text{ gon} \\ a_{AB} &= 3.45 \\ b_{AB} &= 2.00. \end{aligned}$$



◇

4.5 Testnet

Kapitlet har hidtil omhandlet kvalitetsvurdering af allerede gennemførte udjævninger. Ved hjælp af a posteriori kovariansmatricen for elementerne, $\Sigma_{\hat{x}}$, kan elementernes spredninger bestemmes, og der kan tegnes konfidensellipser. Det er altså muligt alene ud fra $\Sigma_{\hat{x}}$ at vurdere præcisionen af de udjævnedes koordinater. Kovariansmatricen er givet ved (4.6):

$$\begin{aligned}\Sigma_{\hat{x}} &= \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{N}^{-1} \\ &= \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A})^{-1}.\end{aligned}$$

Hvis $\hat{\sigma}_0^2$ i (4.6) udskiftes med a priori værdien $\sigma_0^2 = 1$, kan udtrykket bruges til planlægning af net. Ligningen er nu reduceret til

$$\Sigma_x = (\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A})^{-1}.$$

Det ses, at observationsvektoren, $\mathbf{b}$, ikke indgår i udtrykket for kovariansmatricen. Dette betyder, at kovariansmatricen kan opstilles før en eneste observation er foretaget! Når det er bestemt hvilke punkter, der skal observeres imellem og hvilke typer observationer, der er tale om, kan designmatricen $\mathbf{A}$ opstilles. Vægtmatricen $\mathbf{C}$ kan opstilles når a priori spredningerne er estimeret, det vil sige, når det er bestemt hvilke instrumenter, der skal benyttes, og hvor mange målinger, der skal foretages. Det er nu muligt at beregne Σ_x og dermed bestemme de udjævnedes koordinaters a priori spredninger samt tegne konfidensellipser. Forud for målingen er det således muligt at vurdere om de planlagte observationer leder til en acceptabel bestemmelse af koordinaterne. En sådan planlægning af nettet betegnes et *testnet*. Hvis testnettet viser, at koordinaterne ikke er tilfredsstillende bestemt, kan nettes opbygning ændres, eller der kan planlægges ydeligere observationer, og

testnettet kan genberegnes. På denne måde kan det sikres, at de planlagte observationer fører til det ønskede resultat, inden observationerne foretages i marken. Ved at benytte testnet kan det sikres, at man ikke skal i marken flere gange for at opnå det ønskede resultat.

4.6 Opgaver

Opgave 4.1 Fortsat fra opgave 3.3. Beregn variansfaktoren, spredningen på vægtenheden, kovariansmatricen for elementerne og kovariansmatricen for residualerne.

Opgave 4.2 Fortsat fra opgave 4.1. Beregn de normaliserede residualer. Beregn halve storakse, halve lilleakse samt orienteringen af konfidensellipsen i punkt P .

Opgave 4.3 Fortsat fra opgave 4.2. Beregn spredningen i retningen $\alpha = 30$ gon.

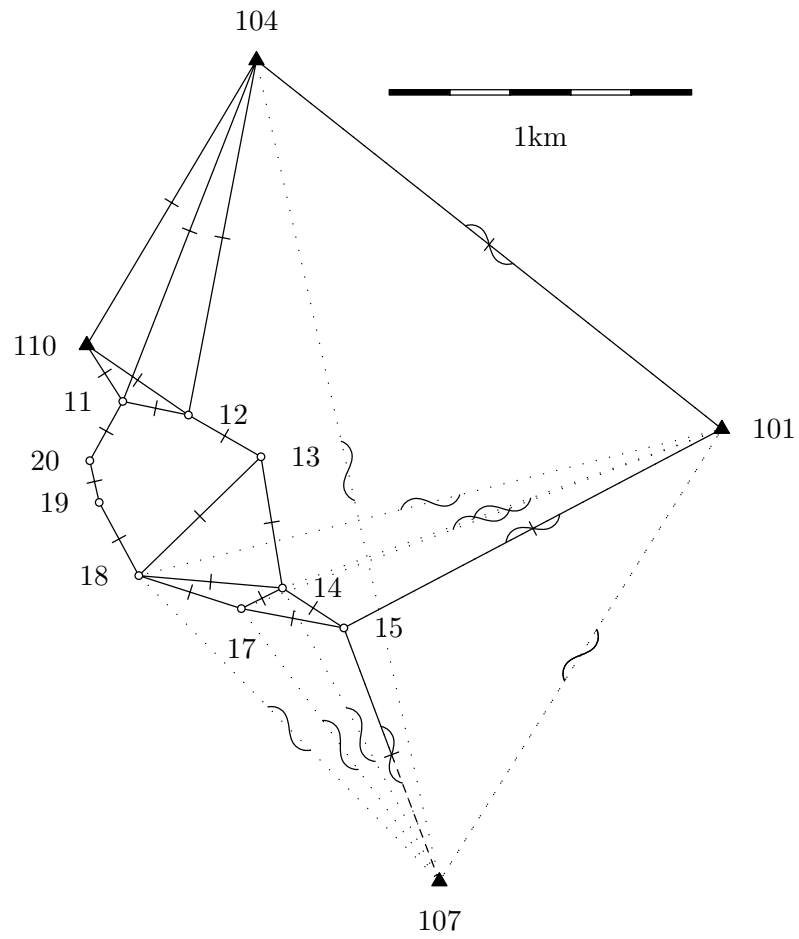
Kapitel 5

Turbo-Net

Turbo-Net er et udjævningsprogram, der udjævner landmålingsobservationer efter mindste kvadraters princip. Programmet er dels dokumenteret i Turbo-Net manualen (GeoComp, 1991), der findes som Word Perfect fil, og dels i (Borre, 1996). For brug af programmet henvises til disse kilder. Kapitel fokuserer ikke på programmets mange muligheder men viser gennem et eksempel, hvordan en enkelt opmålingsopgave *kan* løses.

5.1 Data

Som eksempel bruges data fra en 5. semester gruppe på landinspektørstudiet efteråret 1995. I målingen indgår tre planfikspunkter (61-06-010, 61-06-804, 61-11-007), tre højdefikspunkter (61-06-9007, 61-06-9017, 61-06-9049), et kombineret plan og højdefikspunkt (61-06-001) samt ni polygonpunkter (11,12,13,14,15,17,18,19,20); ialt 16 punkter. Projektgruppen valgte at give fikspunkterne nye numre, se tabel 5.1. Der er observeret 12 GPS vektorer, 39 horisontalretninger, 39 zenitdistancer, 39 skråafstande samt 6 geometrisk bestemte højdeforskelle. De terrestriske observationer er givet i a:\turbonet\land filen. GPS vektorerne ligger i 12 l-filer i samme bibliotek. Det ses af netskit-sen, at polygonpunkterne er knyttet til fikspunkterne både med terrestriske observationer og med GPS vektorer. Dette skyldes, at målingen er resultat af en øvelse, hvor begge observationstyper skulle anvendes. Ved løsning af tilsvarende opgaver, foretages fikspunktstilknytningen i praksis udelukkende med GPS, når dette er muligt.



Figur 5.1: Netskitse.

GI nr.	Lokalt nr.	Y [m]	X [m]	H [m]
61-06-00010	110	286466.280	244745.835	
61-06-00804	104	287408.047	244184.616	
61-11-00007	107	284693.736	243579.263	
61-06-00001	101	286189.551	242645.328	64.368
61-06-09007	9007			28.574
61-06-09017	9017			44.979
61-06-09049	9049			22.828

Tabel 5.1: System 34 koordinater og koter i DNN System GM.

5.2 A priori spredning

Inden udjævningen påbegyndes, må der bestemmes a priori spredninger til observationerne. Som grundlag for at bestemme spredningerne er tabel 5.2 opstillet.

$n = 2$	Horisontalretninger er målt med 2 satser
$\sigma_r = 0.001$ gon	Spredning på horisontalretning målt med en sats
$\sigma_c = 0.005$ m	Centreringspredning; $\sigma_{cy} = 0.004$ mm, $\sigma_{cx} = 0.004$ mm
$s_g = 600$ m	Gennemsnitlig sigtelængde i net
$\sigma_g = 0.005$ m	Grundfejl for afstandsmåler
$\sigma_a = 0.003$ m km ⁻¹	Afstandsafhængig fejl for afstandsmåler
$\sigma_z = 0.001$ gon	Spredning på zenitdistance målt med en sats
$\sigma_k = 0.15$ $\sigma_k = 1.00$	Spredning på refraktionskoefficient, afstand ≤ 500 m Spredning på refraktionskoefficient, afstand > 500 m
$\sigma_{ih} = 0.005$ m	Spredning på instrumenthøjde
$\sigma_{sh} = 0.005$ m	Spredning på sigteskivehøjde
$\sigma_{km} = 0.005$ m km ^{-0.5}	Kilometerspredning, geometrisk nivellement
$\omega = 63.6620$ gon	1 radian udtrykt i gon

Tabel 5.2: Forventede karakteristika for observationer.

5.2.1 Horisontalvinkler

Det er ikke muligt i Turbo-Net at vægte de enkelte horisontalretninger. I stedet angives spredningen på en målt vinkel for hver opstilling. Spredningen

på en horisontalvinkel er givet ved

$$\sigma_{V_H} = \sqrt{2\left(\left(\frac{\sigma_r^2}{n}\right) + \left(\frac{\sigma_c\omega}{s_g}\right)^2\right)}.$$

Spredningen kan beregnes med a:\matlab\horison.m.

5.2.2 Zenitdistancer

Spredningen på en zenitdistance er givet ved

$$\sigma_{V_Z} = \arctan\left(\frac{\sigma_{\Delta H}}{s_m}\right).$$

Den tilhørende skråafstand benævnes s_m og $\sigma_{\Delta H}$ er spredningen for højdeforskellen bestemt ved zenitdistancen og skråafstanden. Denne spredning er givet ved

$$\sigma_{\Delta H} = \sqrt{\left(-s_m \sin V_Z\right)^2 \frac{\sigma_z^2}{\omega^2} + \left(\frac{s_m^2}{2R}\right)^2 \sigma_k^2 + \sigma_{ih}^2 + \sigma_{sh}^2},$$

hvor V_Z er den målte zenitdistance og $R = 6368000\text{m}$ er jordens radius. Spredningen kan beregnes med a:\matlab\zenit.m.

5.2.3 Skråafstande

Spredningen på en skråafstand bestemmes ved

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_g^2 + (\sigma_a s_m)^2 + \sigma_c^2}. \quad (5.1)$$

Spredningen kan beregnes med a:\matlab\afstand.m.

5.2.4 Geometrisk nivellement

Spredningen på en højdeforskel bestemt ved geometrisk nivellement er bestemt ved

$$\sigma_{\Delta H} = \sigma_{km} \sqrt{L}, \quad (5.2)$$

hvor L er længden af den nivellerede strækning i kilometer. Spredningen kan beregnes med `a:\matlab\niv.m`.

5.2.5 Koordinatobservationer

Koordinatobservationer og tilhørende spredninger angives i `master.dat`. Hvis spredningen er større end 10 m, opfatter Turbo-Net koordinaten som en foreløbig koordinat og ikke som en koordinatobservation.

5.2.6 GPS

GPS vektorerne er beregnet enkelvis med programmet GPPS. Hver beregning resulterer i en l-fil, der blandt andet indeholder oplysninger om vektorens kvalitet. Turbo-Net læser kvalitetsudtrykkene i l-filen og vægter vektoren herefter. Vektorberegningen tager imidlertid ikke hensyn til en eventuel centreringsfejl ved opstillingen af antennerne. Hvis vektoren ønskes tillagt et centreringsbidrag, må l-filen derfor ændres.

BASELINE		0101 TO 0014		

delta X		684.538	+/- 0.002m	CorXY =-0.346
delta Y		-1352.403	+/- 0.001m	CorXZ = 0.440
delta Z		-303.658	+/- 0.003m	CorYZ =-0.753
LENGTH		1545.896	m	
CONTRAST		100.000%		
Chi2/NDF		1.393		
Mark1_xyz		3430573.2766	594909.9684	5326162.3640
Az1 E11 D1		249.66291	-0.4895	1545.8958
E1 N1 U1		-1449.2935	-537.4996	-13.0194
Mark2_xyz		3431257.8145	593557.5656	5325858.7059
Az2 E12 D2		69.64290	0.4756	1545.8958
E2 N2 U2		1449.4782	537.4981	13.0194

I det sidste afsnit af l-filen står vektorens komponenter og de tilhørende spredninger. I dette tilfælde er vektorkomponenterne og spredningerne $\Delta X = 684.538$ m, $\Delta Y = -1352.403$ m, $\Delta Z = -303.658$ m og $\sigma_{\Delta X} = 0.002$ m, $\sigma_{\Delta Y} = 0.001$ m, $\sigma_{\Delta Z} = 0.003$ m. Udfra spredningerne kan diagonalen i kovariansmatricen for vektoren bestemmes

$$\Sigma_{\text{WGS84}} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_Y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_Z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.400 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.100 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.900 \end{bmatrix} \times 10^{-5}.$$

Kovariansmatricen kaldes Σ_{WGS84} , fordi den er givet i WGS 84 koordinatsystemet.

Yderst til højre i l-filen er angivet *korrelationskoefficienterne* for korrelationerne mellem de tre vektorkomponenter. Korrelationskoefficienterne er $\text{CorXY} = \rho_{XY} = -0.346$, $\text{CorXZ} = \rho_{XZ} = 0.440$ og $\text{CorYZ} = \rho_{YZ} = -0.753$.

Korrelationskoefficienter er normerede kovarianser, der ligger i intervallet fra -1 til $+1$. Ligesom kovarianserne er korrelationskoefficienterne udtryk for afhængighed mellem vektorkomponenterne. Sammenhængen er givet ved

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sqrt{\sigma_i^2 \sigma_j^2}.$$

En korrelationskoefficient på ± 1 angiver fuldstændig korrelation mens en korrelationskoefficient på 0 angiver, at variablene i og j ikke er korrelerede. Det er nu muligt at opstille den fulde kovariansmatrix for vektoren

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{WGS84}} &= \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} & \sigma_{YZ} & \sigma_Z^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.400 & -0.069 & 0.264 \\ -0.069 & 0.100 & -0.226 \\ 0.264 & -0.226 & 0.900 \end{bmatrix} \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

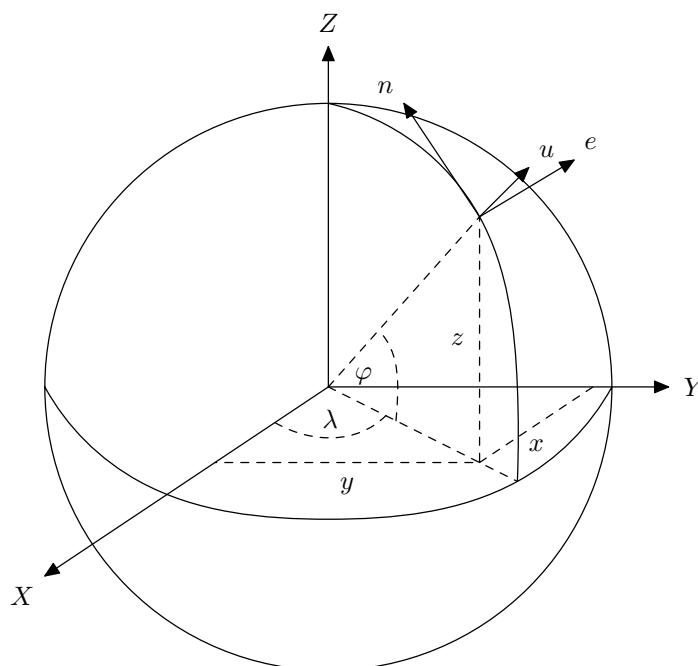
Kovariansmatricen beskriver vektorens præcisionsforhold. For at tillægge et centreringsbidrag må kovariansmatricen derfor ændres. Ved denne udjævning er centreringsbidragene udtrykt i System 34 ved $\sigma_{cy} = \sigma_{cx} = \sqrt{\sigma_c^2/2} = 0.004$ m og $\sigma_{ih} = 0.005$ m. Istedet for at udtrykke centreringsbidragene i System 34 kan de lige såvel udtrykkes i et andet topocentrisk system, der er orienteret som UTM. Centreringsbidragene heri er $\sigma_{ce} = \sigma_{cx} = 0.004$ m, $\sigma_{cn} = \sigma_{cy} = 0.004$ m og $\sigma_{cu} = \sigma_{ih} = 0.005$ m. System 34 og UTM er topocentriske koordinatsystemer, mens WGS 84 er et geocentrisk koordinatsystem, hvorfor koordinatakserne i de to typer af systemer ikke er parallelle. Da centreringsbidragene er givet i et topocentrisk system, kan de ikke umiddelbart lægges til kovariansmatricen; kovariansmatricen givet i det geocentriske system må først transformeres til det topocentriske system. Kovariansmatricen kan transformeres fra WGS 84 til det topocentriske system ved

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{Topo}} &= F \Sigma_{\text{WGS84}} F^T \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_e^2 & \sigma_{en} & \sigma_{eu} \\ \sigma_{en} & \sigma_n^2 & \sigma_{nu} \\ \sigma_{eu} & \sigma_{nu} & \sigma_u^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.131 & -0.049 & -0.287 \\ -0.049 & 0.323 & 0.153 \\ -0.287 & 0.153 & 0.945 \end{bmatrix} \times 10^{-5}, \end{aligned}$$

hvor *transformationsmatricen* F er givet ved

$$F = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

De geografiske koordinater til opmålingsområdets tyngdepunkt vælges som φ og λ .



Figur 5.2: Geocentrisk og topocentrisk koordinatsystem.

Kovariansmatricen for vektoren er nu givet i det topocentriske system, og centreringsbedragene kan adderes til diagonalelementerne i matricen. Den ændrede kovariansmatrix Σ_{Topo} er givet ved

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{Topo}} &= \begin{bmatrix} \sigma_e^2 & \sigma_{en} & \sigma_{eu} \\ \sigma_{en} & \sigma_n^2 & \sigma_{nu} \\ \sigma_{eu} & \sigma_{nu} & \sigma_u^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{ce}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cn}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cu}^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.173 & -0.005 & -0.029 \\ -0.005 & 0.192 & 0.015 \\ -0.029 & 0.015 & 0.345 \end{bmatrix} \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

Nu transformeres kovariansmatricen tilbage til WGS 84 systemet ved hjælp af transformationen

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{WGS84}} &= F^T \Sigma_{\text{Topo}} F \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} & \sigma_{YZ} & \sigma_Z^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.226 & -0.002 & 0.067 \\ -0.002 & 0.171 & -0.016 \\ 0.067 & -0.016 & 0.313 \end{bmatrix} \times 10^{-4}.\end{aligned}$$

Ud fra Σ_{WGS84} kan udledes de størrelser, der skal indsættes i l-filen. De nye spredninger til vektorkomponenterne er kvadratroden af diagonalelementerne i kovariansmatricen; $\sigma_{\Delta X} = 0.005$ m, $\sigma_{\Delta Y} = 0.004$ m, $\sigma_{\Delta Z} = 0.006$ m. For at bestemme korrelationskoefficienterne, der skal indsættes i l-filen, bruges relationen

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_i^2 \sigma_j^2}}.$$

Korrelationskoefficienterne bestemmes til $\text{CorXY} = \rho_{XY} = -0.012$, $\text{CorXZ} = \rho_{XZ} = 0.251$ og $\text{CorYZ} = \rho_{YZ} = -0.067$.

Spredningerne og korrelationskoefficienterne rettes i l-filen, og centre-ringsspredningen har nu indflydelse, når Turbo-Net bestemmer vektorens vægt i udjævningen. Hvis det ønskes at tillægge centreringsspredning til GPS vektorerne, skal der foretages en sådan beregning for hver enkel vektor. Beregningerne kan foretages med `a:\matlab\centrer.m`. Ved de efterfølgende udjævninger er der for hver vektor tillagt et centreringsbidrag på $\sigma_{ce} = 0.004$ m, $\sigma_{cn} = 0.004$ m og $\sigma_{cu} = 0.005$ m.

5.3 Udjævning

Når de terrestriske observationer er opstillet i `land` filen, og a priori spredninger er beregnet for alle observationer, er det tid at begynde på udjævningen. Det er altid en god ide at splitte udjævningen op i to dele; en fri udjævning og en fastholdt udjævning.

I modellen, der anvendes i udjævningen, indgår fastlæggelsen af koordinatsystemet. Selvom der ikke eksplicit tænkes over dette, kræver det rumlige koordinatsystem fastlæggelse af 7 størrelse; 3 translationer, 3 rotationer samt

1 skala. Hvis disse ikke bestemmes af observationerne, er modellen ikke bestemt, og udjævningen kan ikke gennemføres.

Ved en *fri udjævning* fastholdes ingen punkter, men koordinatsystemet defineres ved udover observationerne at tilføje udjævningsproblemet ydeligere information, der sikrer, at normalligningerne ikke er singulære, jævnfør (Borre, 1992) afsnit 6.2. Turbo-Net er ikke i stand til at beregne en fri udjævning. I stedet kan programmet beregne en *minimal fastholdt udjævning*. En minimal fastholdt udjævning er kendetegnet ved, at der akkurat fastholdes så mange koordinater, at koordinatsystemet er defineret. Ved både den frie udjævning og den minimalt fastholdte udjævning tilføjes altså akkurat så megen information, at koordinatsystemet kun lige er bestemt; det gøres blot på forskellig vis. Herved opnås, at det udelukkende er observationerne, der bestemmer nettet. Den frie udjævning og den minimalt fastholdte udjævning bruges derfor til at vurdere observationernes kvalitet. Hvis resultatet er utilfredsstillende, skyldes det, at observationerne passer dårligt sammen. Hvis resultatet derimod er tilfredsstillende, passer observationerne indbyrdes sammen. I det følgende bruges betegnelsen ‘fri udjævning’ selv om udjævningerne med Turbo-Net faktisk beregnes som minimalt fastholdte udjævninger.

Ved den *fastholdte* udjævning introduceres mere information end nødvendigt for at bestemme koordinatsystemet; dette sker i praksis ved at fastholde alle fikspunkter i opmålingsområdet. Definitionen af koordinatsystemet er nu overbestemt, da der fastholdes flere koordinater end nødvendigt for at definere koordinatsystemet. De fastholdte koordinater er aldrig fejlfrie, da de er bestemt med en vis usikkerhed. Dette opleves ved, at der er *spændinger* i nettet. Resultatet af den fastholdte udjævning er, at nettet ikke kun bestemmes af observationerne men også af fikspunkternes kvalitet. Resultatet af den fastholdte udjævning er dermed udtryk for, hvor godt observationerne passer ind i det eksisterende fikspunktsnet.

Det er hensigtsmæssigt først at vurdere observationernes kvalitet gennem en fri udjævning og først derefter foretage en fastholdt udjævning. Ved både den frie og den fastholdte udjævning er det lettere at bevare overblikket, hvis ikke alle observationer udjævnes på en gang. Ved at udjævne observationerne i mindre portioner, bliver det lettere at lokalisere og rette eventuelle problemer. Udjævningen i dette eksempel splittes op i seks udjævninger, hvoraf den sidste udjævning er det endelige resultat:

1. Fri udjævning af GPS vektorer
2. Fri udjævning af terrestriske observationer
3. Fri udjævning af alle observationer
4. Fastholdt udjævning af GPS vektorer

5. Fastholdt udjævning af terrestriske observationer

6. Fastholdt udjævning af alle observationer.

Det er kun muligt at gennemføre udjævning 2 og udjævning 5, hvis de terrestriske observationer danner et eller flere sammenhængende net. Dette er ikke nødvendigvis altid tilfældet.

5.3.1 Fri udjævning af GPS vektorer

Ved en fri udjævning af GPS vektorer er det kun nødvendigt at fastholde et punkt. Ved at fastholde et punkt i tre dimensioner fastlægges koordinatsystemets translation. Tilbage er at bestemme koordinatsystemets rotationer samt skala. Denne information er imidlertid indeholdt i selve GPS observationerne; vektorer er orienteret i rummet og de har en længde. Det vælges at fastholde punkt 101, da alle tre koordinater hertil er kendte, jævnfør tabel 5.1. Dette gøres ved at indsætte punktet i `master.dat` og give det spredningen nul. Først i resultatfilen `resultat.tex` gives det overordnede resultat af udjævningen.

```

Adjustment Summary
-----

A-posteriori standard deviation of unit weight
Sqrt[VtPV/df]           =      1.016

Number of measurements used =      36
Number measurements rejected =       0
Total number of measurements =      36
Degrees of freedom(df)     =      18
Number of singularities    =       0

```

Spredningen på vægtenheden er 1.0; GPS vektorernes a priori spredninger er derfor korrekte jævnfør afsnit 4.1. Der er udjævnet 12 vektorer, der hver kan splittes op i en X , Y og Z komponent. Der er derfor ialt 36 observationer. Vektorerne forbinder 7 punkter, hvoraf det ene er fastholdt. For hvert af de resterende 6 punkter skal der bestemmes tre koordinater. Der er derfor 18 ubekendte og også $(36 - 18)$ 18 overbestemmelser eller frihedsgrader.

```

Adjusted Projection Coordinates
Iteration Number 2

```

```

DK-System34jf

```

station num/name	y-coord (stdv)	x-coord (stdv)	Height (stdv)	Scale
	(m) (m)	(m) (m)	(m) (m)	Convergence (gons)
1 0014				.999951715
285663.631(.004)		244098.859(.003)	51.327(.005)	-.000143
2 0015				.999951837
285531.258(.003)		243895.136(.003)	58.370(.005)	-.000143
3 0017				.999951639

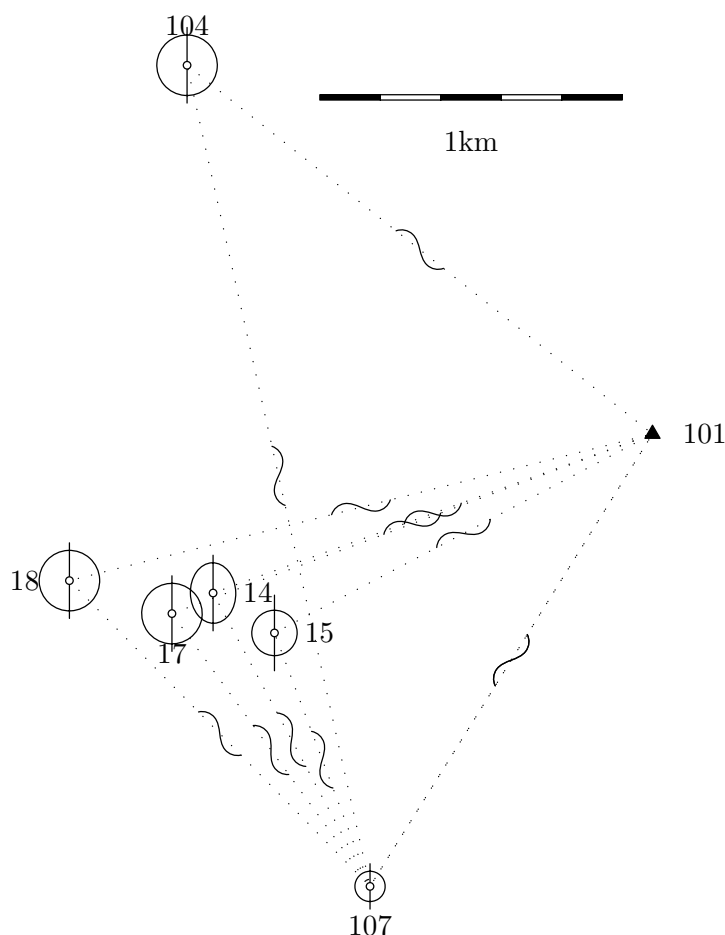
285595.223(.004)	244234.065(.004)	44.739(.005)	-.000144
4 0018			.999951442
285704.718(.004)	244573.634(.004)	32.305(.005)	-.000145
5 0101			.999952565
286189.551(.000)	242645.328(.000)	64.368(.000)	-.000137
6 0104			.999951612
287408.045(.004)	244184.632(.004)	12.601(.005)	-.000144
7 0107			.999952048
284693.731(.002)	243579.235(.002)	59.978(.003)	-.000141

Senere i resultatfilen står de udjævnede koordinater med tilhørende spredninger. Bemærk, at koordinaterne til punkt 101 har spredningen nul, da punktet er fastholdt. Ingen af koordinaterne har spredninger større end 5 mm.

Measurements(Cartesian Vectors)
Iteration Number 2

Vector No.	dx (m)	(vdx,v'dx) (m)	dy (m)	(vdy,v'dy) (m)	dz (m)	(vdz,v'dz) (m)
1	-635.820(	-.002, .5)	-437.500(	-.002, .9)	453.507(	-.002, .7)
2	-712.712(	-.002, .6)	-658.643(	.002, .6)	518.810(	.003, .8)
3	-635.854(	-.001, .3)	-782.001(	.002, .5)	475.424(	.001, .3)
4	761.429(	.002, .5)	-1131.252(	.002, .8)	-368.950(	.002, .6)
5	-672.713(	-.009, 1.6)	-1133.898(	.001, .4)	523.116(	-.005, 1.1)
6	684.538(	.002, .6)	-1352.403(	-.002, .6)	-303.658(	-.003, .8)
7	761.394(	.001, .2)	-1475.761(	-.002, .4)	-347.039(	.000, .0)
8	1397.240(	-.006, 1.3)	-693.758(	-.001, .4)	-822.455(	.006, 1.2)
9	-1397.242(	.004, .9)	693.753(	-.004, 1.0)	822.460(	-.001, .3)
10	-760.343(	.000, .1)	-1703.788(	-.004, 1.1)	613.404(	-.011, 2.6)
11	724.546(	.004, 1.4)	-1827.656(	.000, .0)	-299.339(	.002, .6)
12	-2157.593(	-.004, .7)	-1010.024(	.003, 1.0)	1435.887(	.011, 2.6)

Sidst er angiver GPS vektorerne, residualerne og de normaliserede residualer. Ingen af de normaliserede residualer er større end 2.6. Netskitsen viser, at alle punkter er bestemt med en ensartet og høj præcision. Den frie udjævning viser, at den *interne præcision* af GPS vektorerne er høj. Filerne til denne udjævning findes i biblioteket a:\turbonet\gps.fri.



Figur 5.3: Fri udjævning af GPS vektorer. Konfidensellipser 1 : 1.

I denne udjævning blev punkt 101, der er et kombineret plan- og højdefikspunkt, fastholdt. Hvis der ikke findes et kombineret punkt i området, kan højden til et planfikspunkt for eksempel bestemmes ved hjælp af en GPS vektor målt fra punktet til et andet punkt med kendt højde. En anden mulighed er at fastholde et planfikspunkt samt et højdefikspunkt, der begge indgår i nettet.

5.3.2 Fri udjævning af terrestriske observationer

Igen skal koordinatsystemet akkurat defineres gennem udjævningen. Ved minimal fastholdte udjævninger af terrestriske observationer bør det tilstræbes at fastholde et punkt nær opmålingsområdets tyngdepunkt. Dette skyldes, at konfidensellipserne vokser væk fra det fastholdte punkt. Denne

effekt er ikke tydelig ved den frie udjævning af GPS vektorerne, da a priori spredningerne ikke afhænger af vektorernes længder.

Det vælges at fastholde punkt 14, der ligger centralt i området. I `koord.ud` filen fra den første udjævning er koordinaterne til blandt andet punkt 14 givet. Disse koordinater fastholdes i `master.dat` med spredningen nul. Herved er koordinatsystemets translationer fastlagt. Afstandsobservationerne fastlægger systemets skala. Tilbage er at bestemme rotationerne. En umiddelbar løsning er at fastholde to punkter i stedet for kun et. Dette vil definere koordinatsystemets rotation om lodlinien. Denne løsning er imidlertid ikke brugbar, da der sikkert introduceres spændinger ved at fastholde to punkter; den beregnede afstand mellem de to punkter vil sikkert ikke svare til den målte afstand. I stedet fastlægges koordinatsystemets rotation ved at angive en azimuth i `land` filen. I dette eksempel regnes en azimuth fra punkt 14 til punkt 104.

```
10 87 11 6.1 0.00001      ! (Azimutobservation)(Azimut [grader,min.,sek.]) (Spredning [sek])
14                        ! Opstilling i punkt 14
104                       ! Azimut til punkt 104
```

Azimutobservationen *skal* angives som grader, minutter og sekunder; i dette tilfælde $87^{\circ} 11' 6.1''$. Observationen gives en meget lille a priori spredning for at forhindre nettet i at rotere om det fastholdte punkt. Azimutobservationen indfører ikke spændinger i udjævningen men bestemmer koordinatsystemets rotation om lodlinien. Rotationerne om de to øvrige akser bestemmes af de terrestriske observationer, da disse er foretaget i forhold til lodlinien. Ved altså at fastholde punkt 14 og indføre azimutobservationen, er koordinatsystemet akkurat bestemt.

Lineariseringen af ulineære observationsligninger kræver foreløbige værdier for udjævningens elementer. De foreløbige værdier for punkternes koordinater kan enten regnes af Turbo-Net ud fra de terrestriske observationer, eller brugeren kan indsætte disse i `master.dat` som a priori koordinater. Ved den første udjævning blev der bestemt koordinater til en del af punkterne. Disse koordinater står i filen `koord.ud`. Hvis de foreløbige koordinater indsættes i `master.dat`, *skal* de have spredninger på mindst 10 m, da Turbo-Net ellers opfatter koordinaterne som koordinatobservationer.

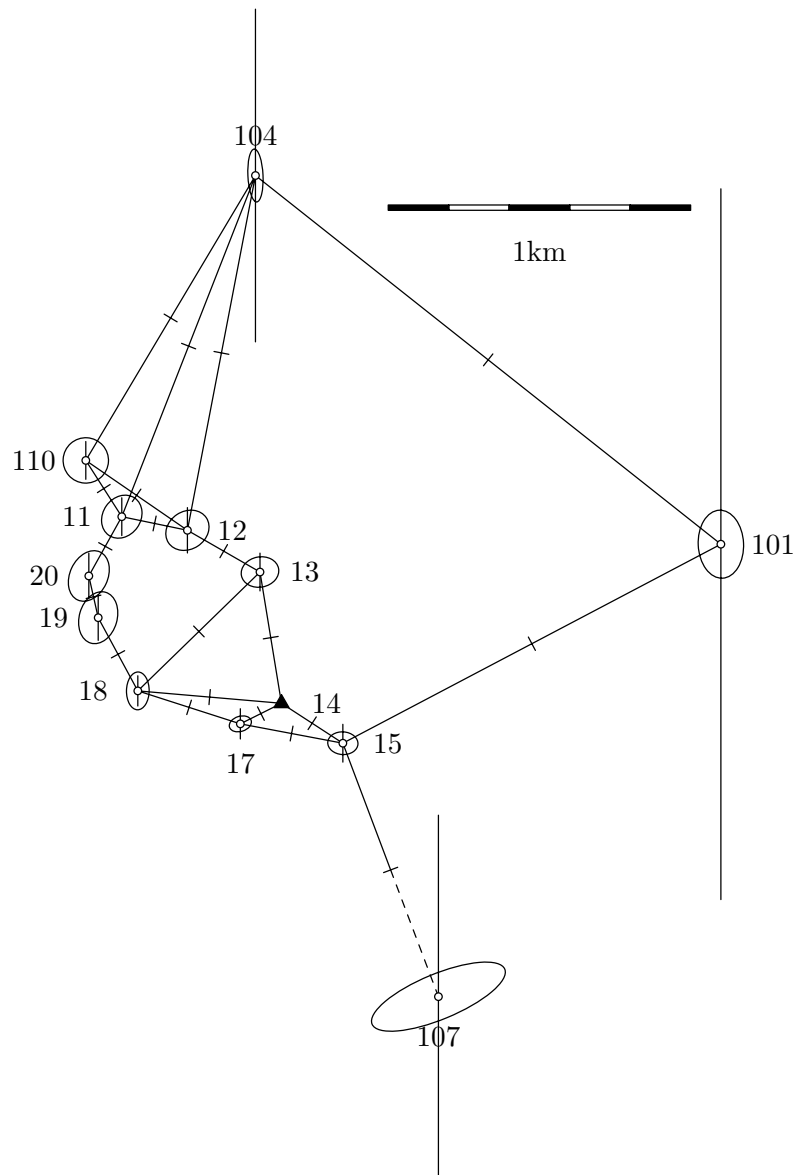
Da Turbo-Net foretager en tredimensional udjævning, skal programmet kende foreløbige tredimensionale koordinater til alle punkter. Dette gælder også for højdefikspunkterne, der indgår i udjævningen. Turbo-Net kan ikke selv bestemme *Y* og *X* koordinaterne til højdefikspunkterne, da der kun er observeret højdeforskelle hertil. Koordinaterne til de tre højdefikspunkter optages derfor på et kort og indsættes i `master.dat`. Koordinaternes spredninger sættes til nul. Dette indfører ikke spændinger nettet, da der hverken

er retnings-, afstands- eller GPS observationer til punkterne.

De foreløbige koordinater i `master.dat` filen til denne udjævning er altså fremkommet ved

- at indsætte hele `koord.ud` filen fra første udjævning. Punkt 14 er givet spredningen nul, mens alle andre punkter gives spredninger på mindst 10 m.
- at indsætte Y og X koordinater til højdefikspunkterne. Koordinaterne er optaget på et kort. Koordinaterne fastholdes med spredningen nul. Fikspunkternes koter gives spredninger på mindst 10 m.

Udjævningen resulterer i en spredning på vægtenheden på 0.96. Dette er tæt på 1 og indikerer, at a priori spredningerne til observationerne er acceptable. Hovedparten af spredningerne på Y og X koordinaterne er mindre end 1 cm. De fleste af højderne er bestemt med spredninger mindre end 1 cm. Et enkelt punkt har en spredning på 9 cm. Det ses af netskitsen, at spredningerne vokser væk fra punkt 14. Det er især tydeligt, at punkt 101, punkt 104 og punkt 107 har større spredninger end de øvrige punkter. Spredninger er betydeligt større end spredningerne fra den frie udjævning af GPS vektorerne. Dette skyldes, at de terrestriske observationer har større a priori spredninger end vektorerne. Enkelte normaliserede residualer er større end 3, men generelt er de betydeligt mindre. Konklusionen på udjævningen er, at de terrestriske observationer har en ensartet intern præcision. Filerne til denne udjævning findes i biblioteket `a:\turbonet\terres.fri`.

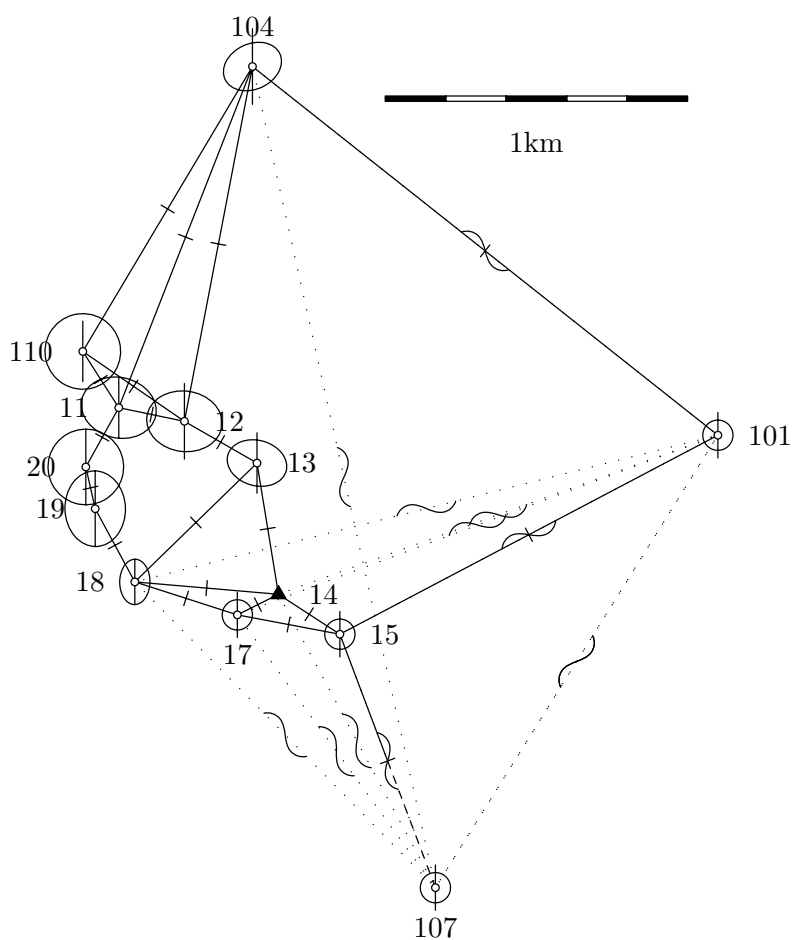


Figur 5.4: Fri udjævning af terrestriske observationer. Konfidensellipser 1 : 2.

5.3.3 Fri udjævning af alle observationer

Nu foretages en samlet fri udjævning af GPS vektorerne og de terrestriske observationer. Da der indgår vektorer i udjævningen, er det kun nødvendigt at fastholde punkt 14 for at bestemme koordinatsystemet. Azimutobserva-

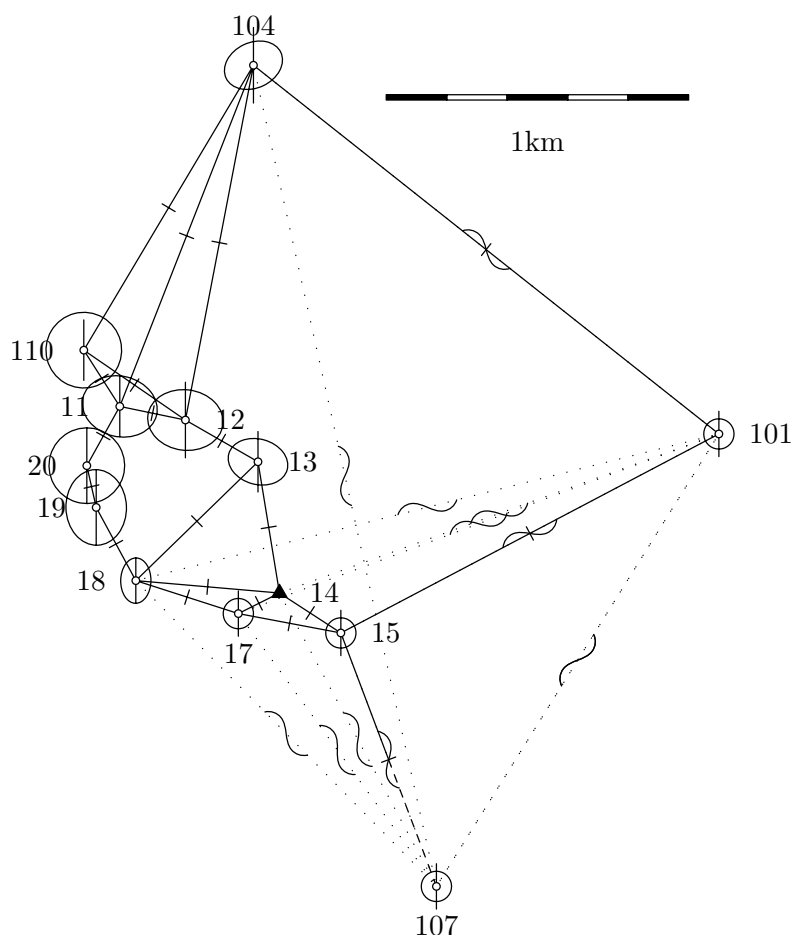
tionen fjernes fra land filen. Master.dat er identisk med master.dat fra forrige udjævning. Spredningen på vægtenheden er 0.9 og spredningerne på punkternes koordinater er højst 5 mm. I forhold til den frie udjævning af de terrestriske observationer viser dette i hvor høj grad, GPS vektorer afstiver en måling. Der er to store normaliserede residualer på henholdsvis 4.0 og 4.8. De øvrige normaliserede residualer er mindre end 3. Netskitzen viser, at alle punkter bestemmes med en ensartet og høj præcision. Efter den frie udjævning er det således sandsynliggjort, at observationerne ikke er behæftet med grove fejl, og at de passer godt sammen. Filerne til denne udjævning findes i biblioteket a:\turbonet\gps_ter.fri.



Figur 5.5: Fri udjævning af alle observationer. Konfidensellipser 1 : 1.

5.3.4 Fri udjævning af alle observationer

Nu foretages en samlet fri udjævning af GPS vektorerne og de terrestriske observationer. Da der indgår vektorer i udjævningen, er det kun nødvendigt at fastholde punkt 14 for at bestemme koordinatsystemet. Det fiktive punkt fjernes fra `master.dat` og de fiktive retningsobservationer fjernes fra `land` filen. Ellers er `master.dat` identisk med `master.dat` fra forrige udjævning. Spredningen på vægtenheden er 0.9 og spredningerne på punkternes koordinater er højst 5 mm. I forhold til den frie udjævning af de terrestriske observationer viser dette i hvor høj grad, GPS vektorer afstiver en måling. Der er to store normaliserede residualer på henholdsvis 4.0 og 4.8. De øvrige normaliserede residualer er mindre end 3. Netskitsen viser, at alle punkter bestemmes med en ensartet og høj præcision. Efter den frie udjævning er det således sandsynliggjort, at observationerne ikke er behæftet med grove fejl, og at de passer godt sammen. Filerne til denne udjævning findes i biblioteket `a:\turbonet\gps_ter.fri`.



Figur 5.6: Fri udjævning af alle observationer. Konfidensellipser 1 : 1.

5.3.5 Fastholdt udjævning af GPS vektorer

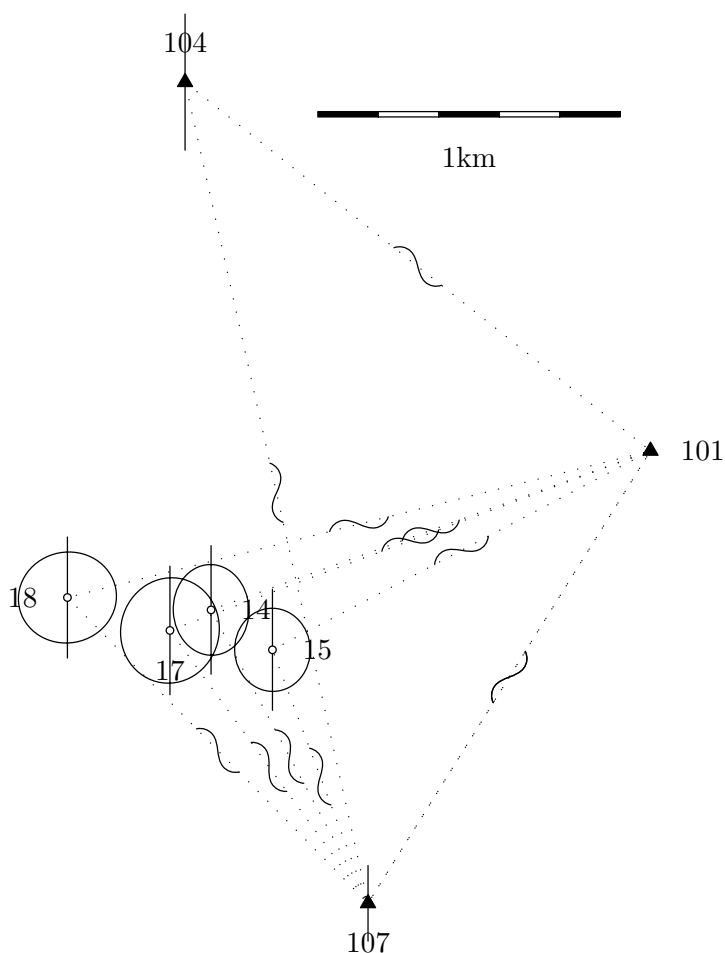
Ved den fastholdte udjævning af GPS vektorerne fastholdes fikspunkterne 101, 104 og 107 med spredning nul. Punkternes koordinater tages fra tabel 5.1. Master.dat indeholder kun koordinater til disse tre punkter. De øvrige fikspunkter medtages ikke, da der ikke er målt hertil med GPS.

I denne udjævning er kun fastholdt en højde, hvilket er for lidt. Hvis højdefikspunkterne var blevet målt med GPS, skulle disse tillige fastholdes. Hvis højdefikspunkterne alene er tilknyttet nettet ved geometrisk nivelement, bør nivellementsnettet først udjævnes for sig. De koter, der herved fremkommer til punkter i nettet, bør dernæst fastholdes i den fastholdte

udjævning af GPS vektorerne.

Spredningen på vægtenheden stiger nu til 3.6. Den frie udjævning af vektorerne viste, at de har en høj og ensartet præcision. Når spredningen på vægtenheden nu stiger, må dette derfor skyldes, at der er spændinger mellem de fastholdte punkter. Spredningerne på de udjævnede koordinater er på op til knap 2 cm. Dette er betydeligt større end ved den frie udjævning, men absolut acceptabelt.

Da de tre fikspunkter er fastholdte, kan udjævningen ikke ændre på deres koordinater. Spændingerne mellem de fastholdte koordinater og vektorerne kommer derfor til udtryk ved, at vektorerne får større residualer end ved den frie udjævning. De normaliserede residualer er dog ikke alarmerende. Filerne til denne udjævning findes i biblioteket `a:\turbonet\gps.fst`.



Figur 5.7: Fastholdt udjævning af GPS vektorer. Konfidensellipser 1 : 2.

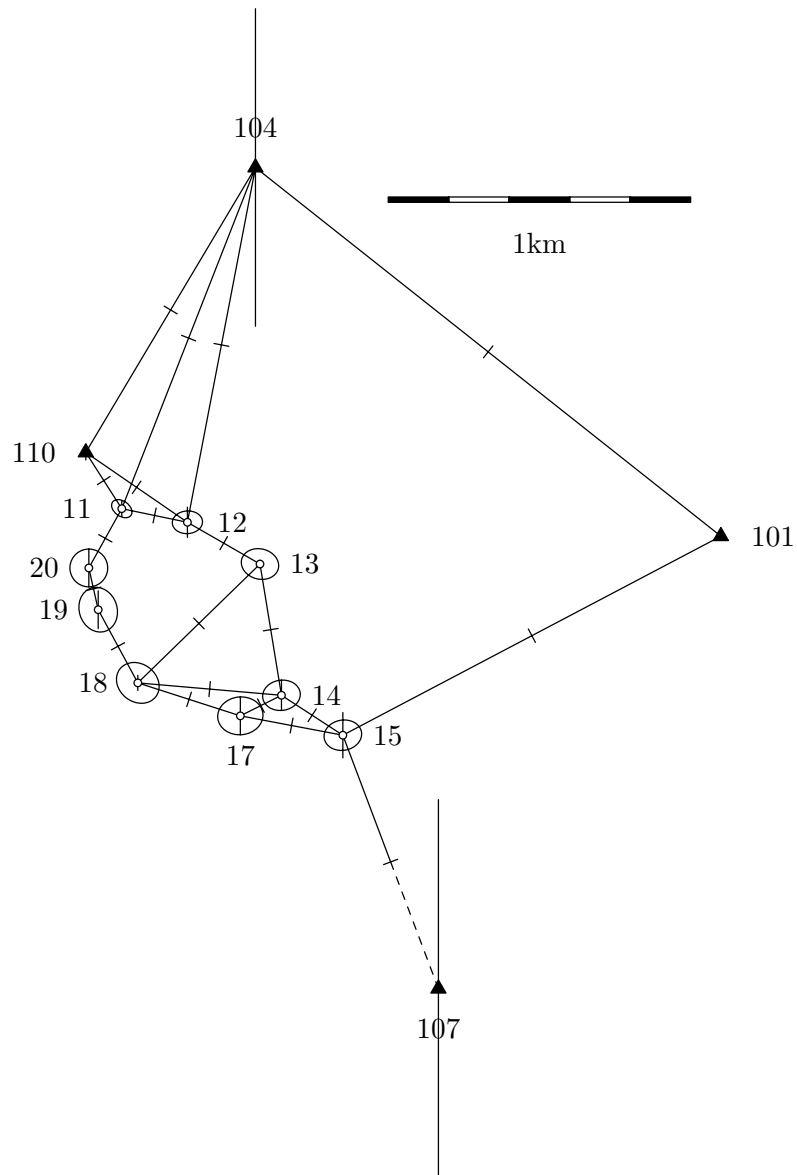
5.3.6 Fastholdt udjævning af terrestriske observationer

Samtlige fikspunkter fastholdes ved denne udjævning, da der er observationer til alle punkterne. Koordinaterne tages fra tabel 5.1. Ydeligere medtages koordinaterne til polygonpunkterne fra `koord.ud` fra den første udjævning. Da disse punkter kun medtages som foreløbige koordinater, gives de spredninger på mindst 10 m.

Spredningen på vægtenheden er vokser en smule til 1.0 fra 0.9 ved den frie udjævning. Hvorfor er spredningen på vægtenheden ikke steget kraftigere, som det var tilfældet ved den fastholdte udjævning af GPS vektorerne?

Svaret er, at a priori spredningerne for de terrestriske observationer er større end vektorernes a priori spredninger. Dette kom ved de frie udjævninger til udtryk ved, at punkterne fik betydeligt mindre a posteriori spredninger når de blev bestemt udfra vektorerne, end når de blev bestemt udfra de terrestriske observationer. De mindre spredninger for vektorerne betyder, at de er mindre fleksible end i de terrestriske observationer. De terrestriske observationers større a priori spredninger gør, at de lettere kan absorbere spændingerne i nettet. Dette er grunden til, at spredningen på vægtenheden ikke stiger volsomt.

Punkternes spredninger er mindre end ved den frie udjævning. Spredningerne på Y og X koordinaterne er højst 6 mm, mens spredningen på højden for de fleste punkter er mindre end 1 cm. For punkt 104 og punkt 107 er spredningen på højden cirka 5 cm. Dette skyldes stadig de lange afstande til disse punkter. De normaliserede residualer er alle små på nær et stort normaliseret residual på 4.4. Filerne til denne udjævning findes i biblioteket `a:\turbonet\terres.fst`.



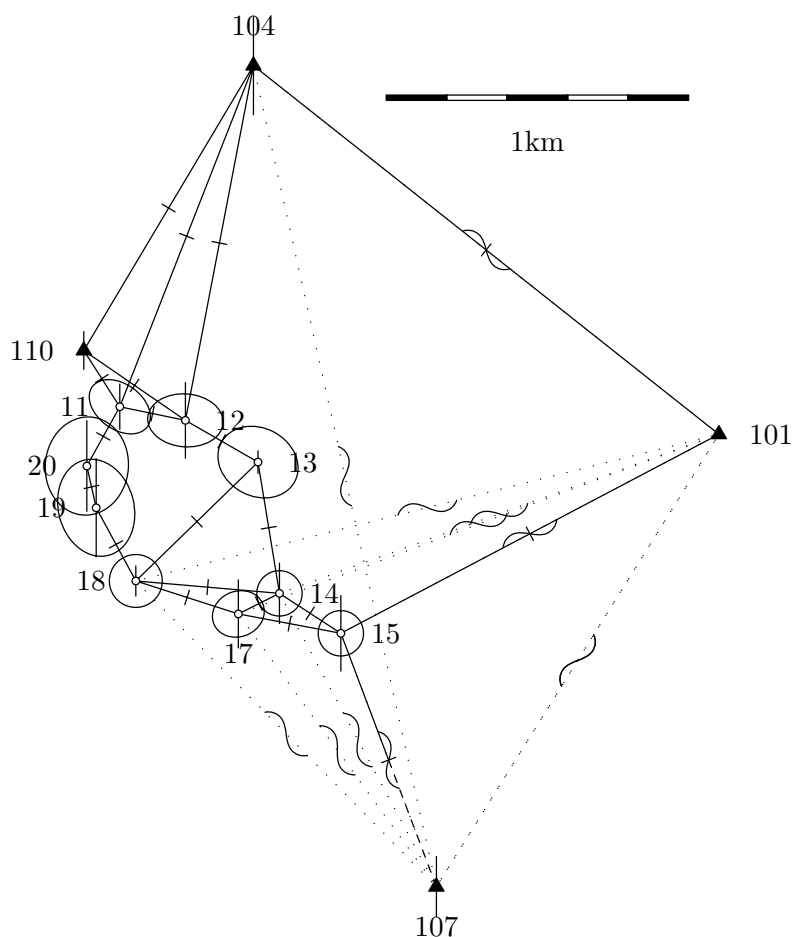
Figur 5.8: Fastholdt udjævning af terrestriske observationer. Konfidensellipser 1 : 2.

5.3.7 Fastholdt udjævning af alle observationer

Alle fikspunkter fastholdes, hvorfor `master.dat` fra forrige udjævning anvendes igen. Spredningen på vægtenheden er 2.8. Spredningerne på koordinat-

terne er op til 13 mm, hvilket er tilfredsstillende.

Hvis for eksempel residualerne for vektorerne sammenlignes med residualerne fra den fastholdte udjævning af vektorerne, ses det, at de absolutte værdier for residualerne i mange tilfælde er næsten ens. De normaliserede residualer er imidlertid vokset. Dette skyldes, at spredningen på vægtenheden er blevet mindre jævnt for ligning (4.7) og (4.8). Det modsatte gør sig gældende, når der ses på de terrestriske observationer. Ved denne udjævning er spredningen på vægtenheden vokset i forhold til den fastholdte udjævning af de terrestriske observationer. De normaliserede residualer er derfor blevet mindre. Filerne til denne udjævning findes i biblioteket `a:\turbonet\gps_ter.fst`.

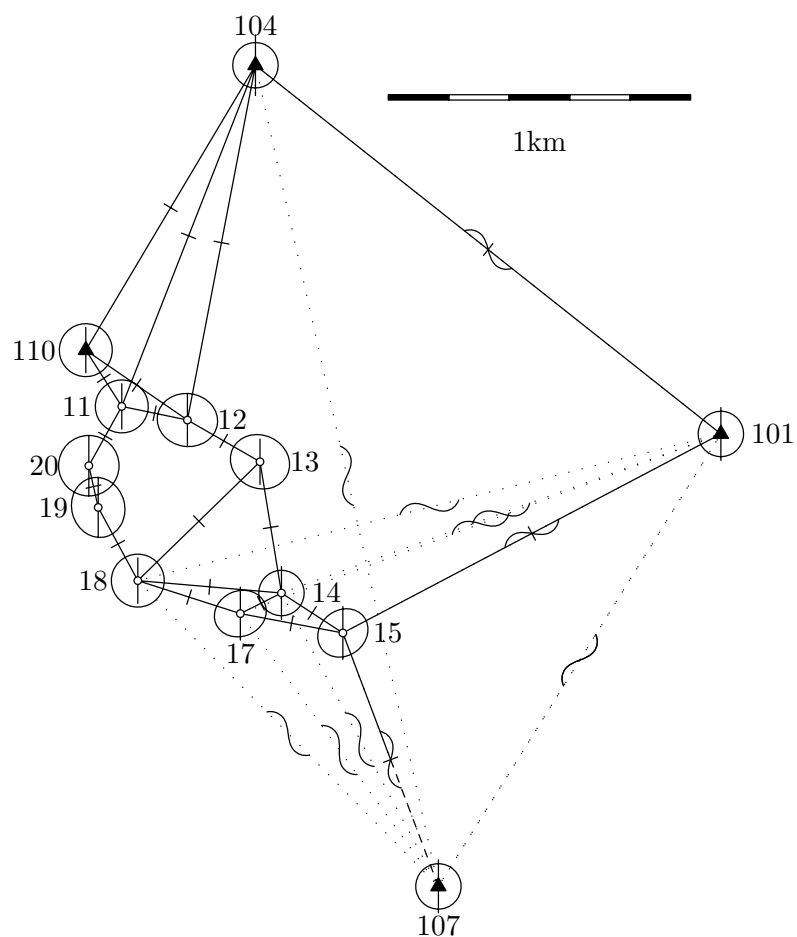


Figur 5.9: Fastholdt udjævning af alle observationer. Konfidensellipser 1 : 2.

Udjævning med spredning på fikspunkter

Udjævning af observationer, der bruges i matrikulære sager, skal enten afsluttes med en fastholdt udjævning som den, der lige er foretaget, eller der kan foretages en fri udjævning, der afslutningsvis transformeres over på fikspunkterne. Begge fremgangsmåder er kendetegnet ved, at fikspunkterne fastholdes fuldstændigt med de koordinater, der opgives af Kort- og Matrikelstyrelsen. Dette betyder, at fikspunkterne betragtes som fejlfrie, da deres koordinater ikke ændres under udjævningen. Det er imidlertid givet, at fikspunkterne ikke er fejlfrie; dette ses for eksempel af de gennemførte udjævninger. Set fra et udjævningsmæssigt synspunkt vil det derfor være mere rimeligt også at give fikspunkterne spredninger. Dette vil betyde, at fikspunkternes koordinater får mulighed for at ændre sig gennem udjævningen. Fra et praktisk synspunkt er det dog fornuftigt at kræve, at fikspunkterne fastholdes fuldtændigt, da fikspunkternes koordinater ellers i princippet ville ændre sig hver gang en ny udjævning foretages.

Den kombinerede udjævning er foretaget endnu en gang. Denne gang er fikspunkterne tildelt spredninger på 1 cm. Ellers er **master.dat** magen til **master.dat** fra forrige udjævning. Spredningen på vægtenheden falder til 1.1. Det er derfor rimeligt at give fikspunkterne spredninger. I forhold til den fastholdte udjævning er antallet af observationer steget. Dette skyldes, at koordinaterne til fikspunkterne nu opfattes om observationer på lige fod med de øvrige observationer. Punkterne er bestemt med mindre spredninger end ved den fastholdte udjævning. Dette ses tydeligt af netskitsen. Residualerne absolutte værdier er ligeledes blevet mindre. Filerne til denne udjævning findes i biblioteket `a:\turbonet\alterna.tiv`.



Figur 5.10: Udjævning, hvor fikspunkter har spredning på 1 cm. Konfiden-
sellipser 1 : 2.

Kapitel 6

Vurdering af udjævning II

Kapitel 4 behandler de grundlæggende værktøjer til vurdering af resultatet af en udjævning. Ved at se på normaliserede residualer og konfidensellipser er det muligt at danne sig et billede af udjævningens kvalitet. Dette kapitel bygger videre på kapitel 4 og præsenterer statistiske værktøjer, der gør det muligt ydeligere at vurdere udjævningen. Kapitlet bygger i høj grad på statistiske tests, der gør det muligt at fremsætte objektive udsagn om udjævningens kvalitet. Statistisk testteori forudsættes derfor kendt af læseren; se eventuelt appendiks A.

Brug af mindste kvadraters princip kræver ikke kendskab til observationernes sandsynlighedsfordeling. Dette er imidlertid en nødvendighed for at anvende testteorien i dette kapitel. Observationerne forudsættes at være normalfordelte. Jo mere denne forudsætning fraviges, jo mindre gyldige er resultaterne af testene. Blandt andet af denne grund er det vigtigt, at observationerne i så høj grad som muligt er befriet for systematiske og grove fejl. Systematiske fejl fjernes ved at anvende en korrekt matematisk model; se kapitel 1. Grove fejl søges elimineret ved fornuftige måleprocedurer og ved forud for udjævningen at kontrollere observationerne med simple beregninger. For eksempel kan det kontrolleres, at vinkelsummen i en trekant er 200 gon. Denne forudgående kontrol af observationerne behandles ikke her.

Hovedparten af de forskellige værktøjer, der behandles i kapitlet, bygger på W. Baardas koncept for kvalitativ vurdering af udjævningsresultatet. Første skridt er en *global test*, hvis mål er at afdække om den matematiske model er tilfredsstillende og om observationerne er normalfordelte. Hvis denne test resulterer i forkastelse af nulhypotesen, H_0 , er næste skridt at forsøge at finde grove fejl blandt observationerne. Dette gøres med en teknik kaldt *Data Snooping*, der bygger på ydeligere tests. En anden grund, til at den globale test forkastes, kan være, at observationerne er vægtet forkert. Det er vigtigt, at de forskellige typer observationer indbyrdes er vægtet kor-

rekt. Det beskrives, hvordan dette kan sikres ved hjælp af *varianssestimation*. Når eventuelle grove fejl er elimineret, og det er sikret, at observationerne er vægtet korrekt i forhold til hinanden, vurderes udjævningens kvalitet. Hidtil er udjævningens kvaliteten vurderet udfra a posteriori kovariansmatricen for elementerne i form af koordinatspredninger og konfidensellipser. Udjævningen er derfor udelukkende blevet vurderet med hensyn til *præcision*. Et ligeså vigtigt aspekt er udjævningens *pålidelighed*. Et af de vigtige værktøjer til vurdering af pålidelighed er *redundanstal*. Redundanstal beskriver hvordan antallet af overbestemmelser er fordelt blandt observationerne.

Figuren på side 126 giver en skematisk fremstilling af samspillet mellem de forskellige værktøjer, der præsenteres i kapitlet. For at kunne anvende metoderne, der beskrives i dette kapitel, må en række forudsætninger være opfyldt:

- A priori variansfaktoren σ_0^2 forudsættes kendt. Denne har værdien 1, jævnfør afsnit 2.3.
- Observationerne forudsættes uafhængige.
- Observationerne forudsættes normalfordelte. Residualerne antages ligeledes at være normalfordelte. Det kan vises, at når observationerne er normalfordelte, er også residualerne normalfordelte.
- Der forudsættes kun at være en grov fejl i observationsmaterialet. Det er ikke muligt på forhånd at afgøre, om denne forudsætning er opfyldt. De metoder, der kræver denne forudsætning opfyldt, gentages derfor flere gange, idet hvert observation/residual undersøges for sig.
- Data snooping kan ikke afsløre grove fejl større end cirka 20 gange spredningen på den pågældende observation, hvorfor fejl af denne størrelse forudsættes elimineret i forvejen.

6.1 Global test

Residualerne spiller en afgørende rolle i Baardas tests. Residualerne bruges både til at afsløre grove fejl og til at vurdere udjævningens pålidelighed. Det er ligeledes residualerne, der anvendes i den globale test. Som nævnt i kapitel 1 består den matematiske model af en funktionel model og en stokastisk model. Formålet med den globale test er at vurdere, om disse er korrekte. Dette gøres ved at teste nulhypotesen, H_0 , der postulerer,

- at observationerne er normalfordelte.
- at den stokastiske model er korrekt, det vil sige, at den giver en realistisk beskrivelse af variationen af observationerne. Det postuleres dermed, at Σ_b matricen er korrekt.

- at den funktionelle model er korrekt, det vil sige, at den giver en korrekt beskrivelse af sammenhængen mellem observationer og ubekendte. Det postuleres dermed, at $\mathbf{A}$ matricen er korrekt.

Nullhypotesen, H_0 , der ovenfor er formuleret verbalt, og den alternative hypotese, H_A , udtrykkes som:

$$\begin{aligned} H_0 : \sigma_0^2 &= \hat{\sigma}_0^2 \\ H_A : \sigma_0^2 &\neq \hat{\sigma}_0^2. \end{aligned}$$

Nullhypotesen postulerer, at a priori variansfaktoren, σ_0^2 , og a posteriori variansfaktoren, $\hat{\sigma}_0^2$, statistisk set er ens. A priori variansfaktoren er 1, mens a posteriori variansfaktoren beregnes efter (4.1). Den alternative hypotese postulerer, at de to variansfaktorer er forskellige. Teststørrelsen, w , der anvendes ved denne test er givet ved

$$w = \frac{u \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}, \quad (6.1)$$

hvor u er antallet af overbestemmelser. Når $\sigma_0^2 = 1$ gælder, at $w = u \hat{\sigma}_0^2 = \hat{\mathbf{r}}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{r}}$. Teststørrelsen er χ^2 fordelt med u frihedsgrader; $w \sim \chi_{(u)}^2$. Nullhypotesen accepteres hvis

$$\chi_{(u, \alpha/2)}^2 < w < \chi_{(u, 1-\alpha/2)}^2,$$

hvor α er det valgte *signifikans niveau*; se appendiks A. Den øvre og nedre kritiske værdi findes ved tabelopslag, se appendiks B. Hvis H_0 accepteres, anses udjævnings forudsætninger og dermed selve udjævningen for at være korrekt. Det skal understreges, at tests *aldrig* kan bevise rigtigheden af en hypotese. Accept af H_0 betyder blot, at den accepteres på det valgte signifikansniveau. Alle residualer indgår i beregningen af w , da disse indgår i beregningen af $\hat{\sigma}_0^2$, se (4.1). Testen er derfor ikke nødvendigvis følsom overfor enkelte grove fejl blandt residualerne. Der kan derfor forekomme enkelte grove fejl i observationsmaterialet uden H_0 forkastes; testen er af global karakter. Hvis H_0 forkastes, kan det skyldes,

- at observationerne/residualerne ikke er normalfordelte. Disse kan være behæftet med grove fejl. Netspændinger vil også ofte være skyld i at, at residualerne ikke er normalfordelte.
- at der er fejl i den stokastiske model. Dette betyder, at observationernes a priori spredninger ikke er korrekte. A priori kovarians matricen for observationerne, Σ_b , er dermed ikke korrekt.

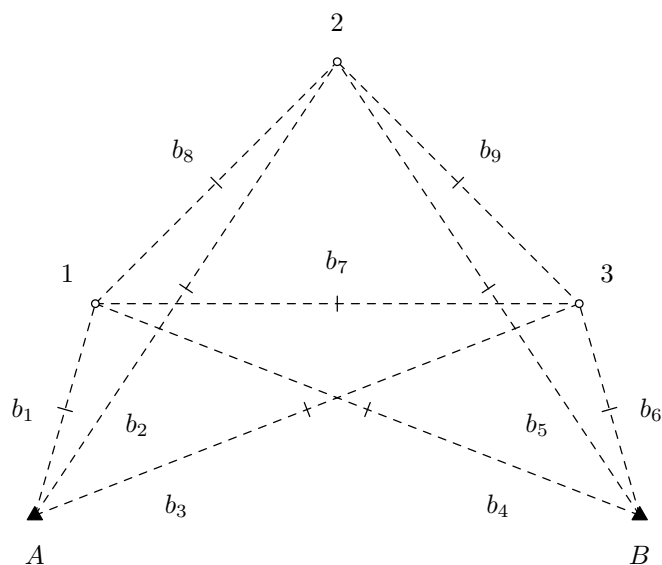
- at der er fejl i den funktionelle model. Dette betyder, at der er systematiske effekter, der ikke er modelleret og dermed, at $\mathbf{A}$ matricen ikke er korrekt.

Hvis H_0 er blevet forkastet, må det undersøges om

- der er grove fejl blandt observationerne. Denne mulighed behandles i næste afsnit.
- den stokastiske model kan forbedres. Det må vurderes om observationerne har korrekte a priori vægte, og dermed om Σ_b er korrekt. Dette behandles i afsnit 6.4.
- den funktionelle model kan forbedres. En forkastelse af H_0 kan næppe tilskrives en fejl i den matematiske model, da de modeller, der anvendes i landmålingen, succesfuldt er anvendt gennem mange år. En mulig fejlkilde er dog, at modellen ikke er korrekt implementeret i udjævningsprogrammet.

Efter de nævnte punkter er undersøgt, og eventuelle rettelser har fundet sted, beregnes udjævningen påny og afsluttes med endnu en global test. Hvis H_0 stadig forkastes, er der sikkert tale om en *Type I* fejl, der er forkastelse af en sand nulhypotese; se appendiks A.

Eksempel 6.1 Figur 6.1 viser et afstandsnet bestående af 5 punkter og 9 afstande. Koordinaterne til punkterne 1, 2 og 3 ønskes bestemt på baggrund af de fastholdte koordinater til punkterne A og B samt observationerne.



Figur 6.1: Afstandsnet.

De kendte og de foreløbige koordinater, observationerne og spredningerne til disse er givet i tabel 6.1 og tabel 6.2. Spredningerne på afstandene er bestemt efter (5.1) med $\sigma_g = 5$ mm, $\sigma_a = 5$ ppm og $\sigma_c = 0$.

Punkt	Y [m]	X [m]
A	100	250
B	100	50
1	170	230
2	250	150
3	170	70

Tabel 6.1: Kendte og foreløbige koordinater.

Observation	Fra	Til	b_i [m]	σ_{b_i} [m]
b_1	A	1	72.803	0.005
b_2	A	2	180.273	0.005
b_3	A	3	193.127	0.005
b_4	B	1	193.134	0.005
b_5	B	2	180.285	0.005
b_6	B	3	72.805	0.005
b_7	1	3	159.998	0.005
b_8	1	2	113.141	0.005
b_9	3	2	113.186	0.005

Tabel 6.2: Observationer og a priori spredninger.

Først gennemføres en fri udjævning af observationerne. Udjævningen følger teorien givet i kapitel 6 i (Borre, 1992). Elementerne i udjævningen er koordinaterne til de fem punkter. Elementerne vælges i følgende rækkefølge: Y_A , X_A , Y_B , X_B , Y_1 , X_1 , Y_2 , X_2 , Y_3 og X_3 .

Forud for en fri udjævning skal koordinaterne reduceres til nettets tyngdepunkt, jævnfør (Borre, 1992) afsnit 6.2.2. Tyngdepunktets koordinater, der er middelværdien af Y og X koordinaterne, er henholdsvis 158 m og 150 m.

Punkt	Y [m]	X [m]
A	-58	100
B	-58	-100
1	12	80
2	92	0
3	12	-80

Tabel 6.3: Koordinater reduceret til tyngdepunkt. Bemærk, at summen af henholdsvis Y og X koordinater er nul.

Opstilling af $\mathbf{A}$ matricen forløber analogt med eksemplerne 3.2, 3.3 og 3.4,

der ligeledes omhandler et afstandsnet.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.962 & 0.275 & 0.000 & 0.000 & 0.962 & -0.275 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.832 & 0.555 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.832 & -0.555 & 0.000 & 0.000 \\ -0.362 & 0.932 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.362 & -0.932 \\ 0.000 & 0.000 & -0.362 & -0.932 & 0.362 & 0.932 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -0.832 & -0.555 & 0.000 & 0.000 & 0.832 & 0.555 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -0.962 & -0.275 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.962 & 0.275 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.707 & 0.707 & 0.707 & -0.707 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.707 & 0.707 & -0.707 & -0.707 \end{bmatrix}.$$

Da ingen koordinater fastholdes, er $\mathbf{A}$ singulær; $\mathbf{A}$ har ti søjler svarende til de ti ubekendte, men rangen af $\mathbf{A}$ er kun syv. Da der er tale om et plant afstandsnet er rangdefekten, d , netop tre, jævnfør (Borre, 1992) afsnit 6.2.2. I udjævningsproblemet indgår således 9 observationer, $m = 9$, 10 ubekendte, $n = 10$, og rangdefekten er 3, $d = 3$. Antallet af overbestemmelser er $u = m - n + d = 9 - 10 + 3 = 2$.

For at kunne gennemføre den fri udjævning opstilles $\mathbf{G}$ matricen, der definerer koordinatsystemet, jævnfør (Borre, 1992) afsnit 6.2.2

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -X_A & Y_A & -X_B & Y_B & -X_1 & Y_1 & -X_2 & Y_2 & -X_3 & Y_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -100 & -58 & 100 & -58 & -80 & 12 & 0 & 92 & 80 & 12 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Observationerne antages at være uafhængige, hvorfor $\mathbf{C}$ kun har elementer forskellige fra nul på diagonalen. Af denne grund gives kun diagonalelementerne.

$$\mathbf{C}_{(D)} = \begin{bmatrix} 39997.088 \\ 39992.790 \\ 39992.276 \\ 39992.276 \\ 39992.790 \\ 39997.088 \\ 39993.601 \\ 39995.475 \\ 39995.473 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.002 \\ -0.005 \\ -0.005 \\ 0.002 \\ 0.007 \\ 0.004 \\ -0.002 \\ 0.004 \\ 0.049 \end{bmatrix}.$$

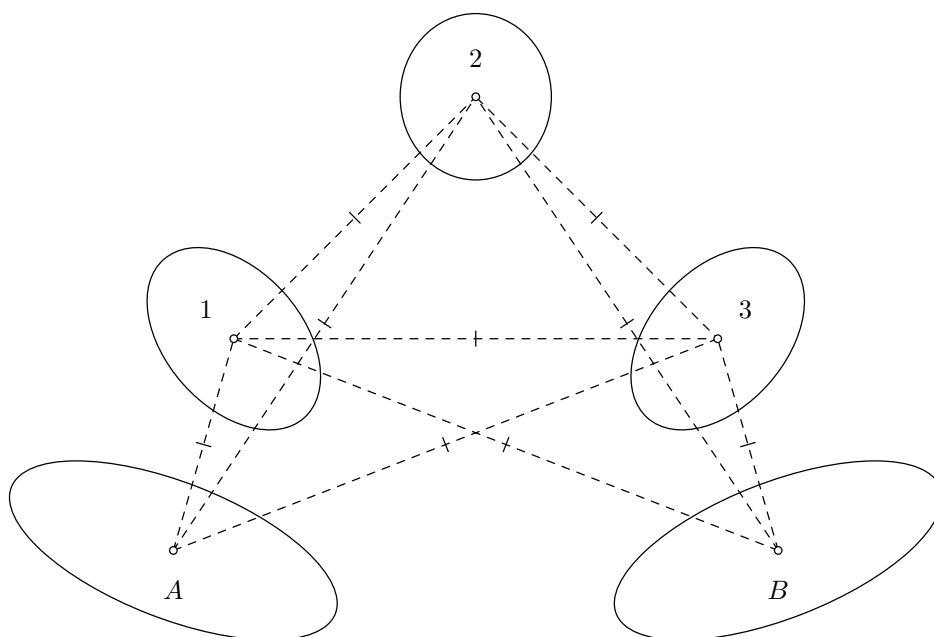
Den pseudoinverse normalligningsmatrix opstilles ifølge (Borre, 1992) ligning (6.23)

$$\mathbf{N}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A})^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{G} \mathbf{G}^T)^{-1} - \mathbf{G} (\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T,$$

koordinattilvæksterne bestemmes ved $\mathbf{x}^+ = \mathbf{N}^+ \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{b}$ og residualerne bestemmes efter (2.21)

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{A} \mathbf{x}^+ - \mathbf{b}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.003 \\ 0.004 \\ -0.001 \\ -0.006 \\ 0.015 \\ -0.011 \\ 0.009 \\ -0.006 \\ -0.015 \end{bmatrix}.$$



Figur 6.2: Frit afstandsnet med konfidensellipser, skala 1:1.

Det undersøges nu om udjævningen kan passere den globale test. Vari-

ansfaktoren for udjævningen bestemmes

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\hat{\mathbf{r}}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{r}}}{m - n + d} \\ &= \frac{29.96}{9 - 10 + 3} \\ &= 14.98.\end{aligned}$$

Teststørrelsen, w , opstilles efter (6.1)

$$\begin{aligned}w &= \frac{u \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \\ &= \frac{2 \times 14.98}{1} \\ &= 29.96.\end{aligned}$$

Det vælges at foretage testen på 5 % signifikansniveauet. Ved hjælp af tabellen i appendiks B findes de kritiske værdier for testen. For at H_0 kan accepteres, skal følgende betingelse være opfyldt

$$\begin{aligned}\chi_{(u, \alpha/2)}^2 &< w < \chi_{(u, 1-\alpha/2)}^2 \\ \chi_{(2, 0.025)}^2 &< w < \chi_{(2, 0.975)}^2 \\ 0.1 &< w < 7.4.\end{aligned}$$

Da betingelsen ikke er opfyldt, forkastes H_0 på 5 % signifikansniveauet. Det må derfor formodes, at et eller flere af nulhypotesens postulater ikke er opfyldt, se side 87. Jo flere overbestemmelser, der er i udjævningen, jo bredere bliver konfidensintervallet for w , se appendiks A. $\diamond$

6.1.1 Turbo-Net

Ved brug af Turbo-Net afsluttes udjævningen med en global test. Resultatet af testen er givet i starten af resultatfilen.

Adjustment Summary

```
-----
A-posteriori standard deviation of unit weight
SQRT[VtPV/df]                =      1.016

Number of measurements used   =      36
Number measurements rejected =       0
Total number of measurements =      36
Degrees of freedom(df)       =      18
Number of singularities      =       0

Chi-Square test prob (alpha) =     .050
Weighted sum of squares     =     18.6
Lower limit Chi-Square test  =      8.2
Upper limit Chi-Square test  =     31.5
```

Spredningen på vægtenheden benævnes ‘`SQRT[VtPV/df]`’, antallet af overbestemmelser benævnes ‘`Degrees of freedom(df)`’. Her ud fra kan teststørrelsen bestemmes. Denne benævnes ‘`Weighted sum of squares`’. Endelig er signifikansniveauet givet ved ‘`Chi-Square test prob (alpha)`’, og de kritiske værdier er givet ‘`Lower limit Chi-Square test`’ og ‘`Upper limit Chi-Square test`’. I det viste tilfælde accepteres nulhypotesen. Signifikansniveauet fastsættes i `master.dat`.

6.2 Data Snooping

Hvis den globale test resulterer i forkastelse af H_0 , må det undersøges, om observationerne er behæftede med grove fejl. Det er ikke ligetil at lokalisere en grov fejl blandt observationerne, da fejlen efter udjævningen er blevet fordelt på residualerne. Det er derfor ikke nødvendigvis observationen med det største residual, der er fejlbehæftet. Her anvendes Baardas metode, *Data Snooping*, til at finde de grove fejl. Der findes andre metoder, men disse behandles ikke.

Det ønskes at finde grove fejl i selve observationsmaterialet og ikke fejl, der er påført udjævningen udefra. For ikke at indføre netspændinger skal udjævningen beregnes som en fri/minimal fastholdt udjævning inden eventuelle grove fejl findes ved data snooping. Det giver ikke mening at bruge data snooping på en fastholdt udjævning!

Rettelser til observationerne og dermed også grove fejl afspejles i residualerne. Residualerne bruges derfor til afsløre grove fejl. A posteriori kovariansmatricen for residualerne er givet ved (4.7)

$$\Sigma_{\hat{r}} = \hat{\sigma}_0^2(\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T).$$

Ved brug af data snooping bruges a priori variansfaktoren i stedet for a posteriori variansfaktoren til at skalere kovariansmatricen. Da a priori variansfaktoren er 1, reduceres udtrykket til

$$\mathbf{Q}_{\hat{r}} = \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T, \quad (6.2)$$

der benævnes kofaktormatricen for residualerne. Elementerne i $\mathbf{Q}_{\hat{r}}$ er altså ikke-skalerede varianser og kovarianser. Det i 'te diagonalelement i $\mathbf{Q}_{\hat{r}}$ benævnes $\hat{q}_{r_i}^2$. Diagonalelementerne i $\mathbf{Q}_{\hat{r}}$ er de ikke-skalerede varianser for residualerne. Varianserne er oftest af forskellig størrelse, hvorfor residualerne tilhører forskellige normalfordelinger, $N(\mu, \hat{q}_{r_i}^2)$. For at kunne sammenligne residualerne transformeres disse til standardnormalfordelingen $N(0, 1)$ ved

at beregne normaliserede residualer. Det normaliserede residual for den i 'te observation er givet ved

$$r'_i = \frac{\hat{r}_i}{\sqrt{\hat{q}_{r_i}^2}}.$$

Det normaliserede residual for den i 'te observation er således residualt divideret med kvadratroden af det i 'te diagonalelement i $\mathbf{Q}_{\hat{r}}$. De normaliserede residualer er standard normalfordelt $N(0, 1)$.

Denne normalisering af residualerne bruges kun ved data snooping og er ikke identisk med den, der er beskrevet i afsnit 4.3. Ved normaliseringen i afsnit 4.3 divideres det i 'te residual med kvadratroden af det i 'te diagonalelement i $\mathbf{\Sigma}_{\hat{r}}$. Det er normaliserede residualer af sidst nævnte type, der oftest angives i resultatfilen fra udjævningsprogrammer.

Som nævnt i indledningen forudsætter data snooping, at kun en observation er fejlbehæftet. De m observationer testes derfor hver for sig. Hypoteserne for test af den i 'te observation lyder:

H_0 : Den i 'te observation er ikke behæftet med en grov fejl.

H_A : Den i 'te observation er behæftet med en grov fejl.

Teststørrelsen, w_i , for denne test er netop det normaliserede residual

$$w_i = \frac{\hat{r}_i}{\sqrt{\hat{q}_{r_i}^2}}. \quad (6.3)$$

Det er i denne forbindelse, at forudsætningen om uafhængige observationer kommer ind i billedet. Hvis observationerne ikke er uafhængige, det vil sige, hvis vægtmatricen $\mathbf{C}$ ikke er diagonal, må der anvendes en anden teststørrelse. Hvis der for eksempel udjævnes GPS vektorer, er $\mathbf{C}$ ikke diagonal, da hver GPS vektor bidrager med en 3×3 fuld kovariansmatrix.

Inden en hypotese testes, må *signifikansniveauet*, α , og *testens styrke*, $1 - \beta$, fastlægges. Baarda foreslår $\alpha = 0.1\%$ og $1 - \beta = 80\%$. Dette fører til en øvre og nedre kritisk værdi på ± 4.1 , se appendiks A. Størrelsen af de kritiske værdier afspejler, hvor stor en fejl skal være, før den betragtes som en grov fejl. Hvis $|w_i| < 4.1$ accepteres H_0 . Hvis $|w_i| > 4.1$ forkastes H_0 , og der er grund til at tro, at observationen, der testes, er behæftet med en grov fejl. I afsnit 6.5.1 bestemmes hvor stor fejlen er, der svarer til w_i .

Ved at anvende Baardas værdier er sandsynligheden for at acceptere H_0 , når observationen ikke er behæftet med en grov fejl, $1 - \alpha = 99.9\%$. Hvis observationen derimod er behæftet med en grov fejl større end fejlen svarende til w_i , er sandsynligheden for at afsløre denne $1 - \beta = 80\%$. Sandsynligheden for ikke at afsløre en grov fejl større end fejlen svarende til w_i er $\beta = 20\%$.

Det ville være ønskeligt at have både $1 - \alpha$ og $1 - \beta$ så tæt på 100% som muligt. Der ville da være høj sandsynligheden at acceptere H_0 , når observationen ikke er behæftet med en grov fejl, og samtidig ville sandsynligheden for afsløre en grov fejl, når observationen er behæftet med en sådan, ligeledes være høj. Tabel 6.4 gengiver kritiske værdier for varierende størrelser af α og $1 - \beta$. Det ses heraf, at jo højere både $1 - \alpha$ og $1 - \beta$ ønskes, jo mere vokser de kritiske værdier for $|w_i|$. Dette er ensbetydende med, at jo højere værdier der ønskes for $1 - \alpha$ og $1 - \beta$, jo større skal en fejl være for at kunne afsløres som en grov fejl. Da det ikke er fornuftigt, at fejlene skal være meget store for at kunne afsløres, kan $1 - \alpha$ og $1 - \beta$ ikke begge være store.

Blandt normalfordelte observationer ligger 99.7% af disse i intervallet fra -3σ til $+3\sigma$. Observationer uden for dette interval betragtes ofte som værende behæftede med grove fejl. Ved at vælge α og β således den kritiske værdier for $|w_i|$ ligger i nærheden af 3, bibeholdes denne opfattelse af grove fejl.

	$1 - \beta = 98\%$	$1 - \beta = 95\%$	$1 - \beta = 90\%$	$1 - \beta = 80\%$
$\alpha = 0.1\%$	5.3	4.9	4.6	4.1
$\alpha = 0.3\%$	5.0	4.6	4.3	3.8
$\alpha = 1.0\%$	4.6	4.2	3.9	3.4
$\alpha = 5.0\%$	4.0	3.6	3.3	2.8

Tabel 6.4: Kritiske værdier for $|w_i|$ ved variation af α og $1 - \beta$.

Data snooping behandler kun et residual ad gangen. Efter udjævningen er gennemført, testes residualerne derfor et ad gangen. Det er vigtigt at påpege, at selvom H_0 forkastes ved test af et residual, er det ikke sikkert, at den pågældende observation er behæftet med en grov fejl. Testen angiver blot, at observationen muligvis er fejlagtig, og at observationen bør undersøges. En grov fejl i een observation smitter sædvanligvis af på residualerne til de øvrige observationer, se afsnit 6.3. Når der er grove fejl i observationsmaterialet, kan data snooping derfor fejlagtigt angive ikke-fejlagtige observationer som værende behæftede med grove fejl. For at lokalisere de grove fejl må der

anvendes en iterativ procedure, hvor observationerne med de mulige grove fejl på skift tages ud af observationsmaterialet, hvorefter udjævningen genberegnes. Da grove fejl smitter af på alle residualer, må proceduren tillade, at allerede udtagne observationer ved en senere iteration atter inddrages i udjævningen.

Data snooping bør ikke anvendes ukritisk. Det bør være brugeren, der i sidste ende afgør, om en observation skal fjernes fra observationsmaterialet. Der kan være grunde til at medtage observationer, der angives som værende fejlbehæftede. Der kan højst fjernes u grove fejl, da en overbestemmelse forsvinder, hver gang en observation fjernes. Det er brugerens ansvar at vurdere, om antallet af overbestemmelser eventuelt er blevet for lavt, efter de grove fejl er fjernet. Efter grove fejl er fjernet, må brugeren vurdere, om ydeligere observationer skal foretages.

Eksempel 6.2 Fortsat fra eksempel 6.1. Den globale test for udjævning af afstandsnettet blev forkastet i eksempel 6.1. Det undersøges ved hjælp af data snooping, om dette skyldes grove fejl i observationsmaterialet. Kofaktormatricen for residualerne opstilles ifølge (6.2). Da der i eksempel 6.1 blev foretaget en fri udjævning, erstattes $\mathbf{N}^{-1}$ med $\mathbf{N}^+$

$$\mathbf{Q}_{\hat{r}} = \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{N}^+\mathbf{A}^T.$$

Da kun diagonalen i $\mathbf{Q}_{\hat{r}}$ har interesse, gengives kun denne

$$\mathbf{Q}_{\hat{r}(D)} = \begin{bmatrix} 0.468 \\ 0.901 \\ 0.132 \\ 0.132 \\ 0.901 \\ 0.468 \\ 0.346 \\ 0.826 \\ 0.826 \end{bmatrix} \times 10^{-5}.$$

Da residualerne blev bestemt i eksempel 6.1, kan teststørrelserne til data

snooping opstilles ifølge (6.3)

$$\begin{aligned} |w_1| &= \left| \frac{-0.003}{\sqrt{0.468 \times 10^{-5}}} \right| = 1.2 \\ |w_2| &= 1.2 \\ |w_3| &= 1.2 \\ |w_4| &= 5.0 \\ |w_5| &= 5.0 \\ |w_6| &= 5.0 \\ |w_7| &= 4.9 \\ |w_8| &= 2.2 \\ |w_9| &= 5.3. \end{aligned}$$

Det vælges at fastsætte signifikantniveauet til 5 % og testens styrke til 90 %; $\alpha = 0.05$, $1 - \beta = 0.9$. Det ses af tabel 6.4, at den kritiske værdi for $|w_i|$ er 3.3. Teststørrelserne for den fjerde, femte, sjette, syvende og niende observation overstiger den kritiske værdi, og H_0 forkastes derfor for disse observationer. Data snooping indikerer således, at en eller flere af disse observationer *muligvis* er behæftede med grove fejl. Det er ikke muligt umiddelbart at afgøre hvilken/hvilke observationer, det drejer sig om. Da data snooping forudsætter, at der kun er en grov fejl blandt observationerne, tages kun observationen svarende til den største teststørrelse ud af observationsmaterialet, før udjævningen genberegnes. I dette tilfælde tages observation ni derfor ud af udjævningen, inden den atter beregnes.

Ved at genberegne den fri udjævningen med de otte resterende observationer fås følgende residualer og kofaktormatrix for residualerne.

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} -0.003 \\ 0.004 \\ -0.001 \\ 0.000 \\ -0.001 \\ 0.001 \\ 0.001 \\ -0.004 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{r}}(\text{D})} = \begin{bmatrix} 0.468 \\ 0.901 \\ 0.132 \\ 0.005 \\ 0.036 \\ 0.019 \\ 0.141 \\ 0.798 \end{bmatrix} \times 10^{-5}.$$

Teststørrelser til data snooping beregnes igen for at afgøre, om den grove

fejl er blevet lokaliseret

$$|w_1| = 1.3$$

$$|w_2| = 1.3$$

$$|w_3| = 1.3$$

$$|w_4| = 1.3$$

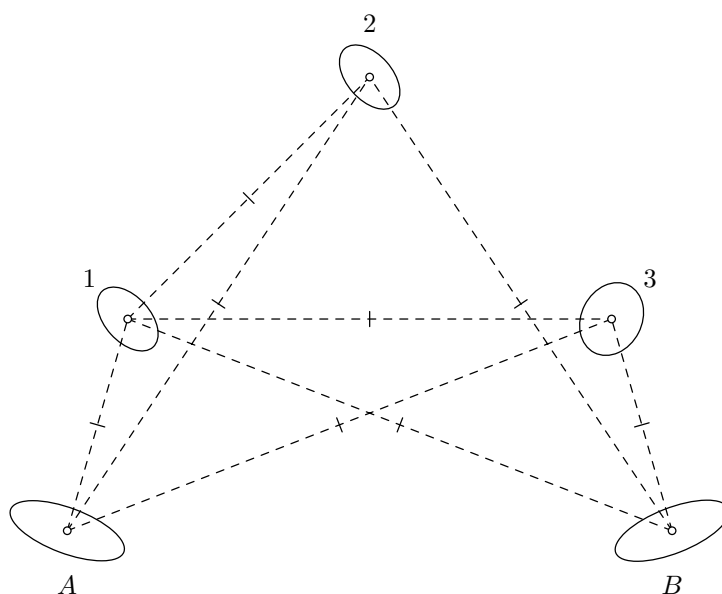
$$|w_5| = 1.3$$

$$|w_6| = 1.3$$

$$|w_7| = 1.3$$

$$|w_8| = 1.3.$$

Ingen af teststørrelserne overskrider nu den kritiske værdi. Det konkluderes derfor, at det er observation ni, der er behæftet med en grov fejl. De høje værdier for teststørrelsen for den fjerde, femte, sjette og syvende observation ved den første data snooping test skyldtes derfor den grove fejl på den niende observation.



Figur 6.3: Frit afstandsnet med konfidensellipser, skala 1:1.

Ved at sammenligne figur 6.2 og figur 6.3 ses, at konfidensellipserne er blevet mindre, efter den grove fejl er fjernet. Præcisionen er derfor blevet større. $\diamond$

Eksempel 6.3 Fortsat fra eksempel 6.2. Efter den grove fejl er fjernet fra observationsmaterialet, gennemføres den globale test for afstandsnettet atter. Variansfaktoren bestemmes til

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\hat{\mathbf{r}}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{r}}}{m - n + d} \\ &= \frac{1.58}{8 - 10 + 3} \\ &= 1.58.\end{aligned}$$

Teststørrelsen, w , opstilles efter (6.1)

$$\begin{aligned}w &= \frac{u \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \\ &= \frac{1 \times 1.58}{1} \\ &= 1.58.\end{aligned}$$

De kritiske værdier for testen findes ved opslag i tabellen i appendiks B. Bemærk, at antallet af overbestemmelser nu er 1, da en observation er fjernet fra observationsmaterialet. For at H_0 kan accepteres, skal følgende betingelse være opfyldt

$$\begin{aligned}\chi_{(u, \alpha/2)}^2 &< w < \chi_{(u, 1-\alpha/2)}^2 \\ \chi_{(1, 0.025)}^2 &< w < \chi_{(1, 0.975)}^2 \\ 0.0 &< w < 5.0.\end{aligned}$$

Denne gang accepteres H_0 . ◇

Eksempel 6.4 Fortsat fra eksempel 6.3. Nu gennemføres en fastholdt udjævning af afstandsnettet for at bestemme koordinaterne til punkt 1, punkt 2 og punkt 3. Elementerne i udjævningen er koordinaterne til punkterne: $Y_1, X_1, Y_2, X_2, Y_3, X_3$. Da observation ni udelades på grund af den grove fejl, er der 8 observationer og 6 ubekendte i udjævningen, hvorfor antallet af overbestemmelser er $u = m - n = 8 - 6 = 2$. Matricerne $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ og $\mathbf{b}$ er

givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.962 & -0.275 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.832 & -0.555 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.362 & -0.932 \\ 0.362 & 0.932 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.832 & 0.555 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.962 & 0.275 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 \\ -0.707 & 0.707 & 0.707 & -0.707 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix},$$

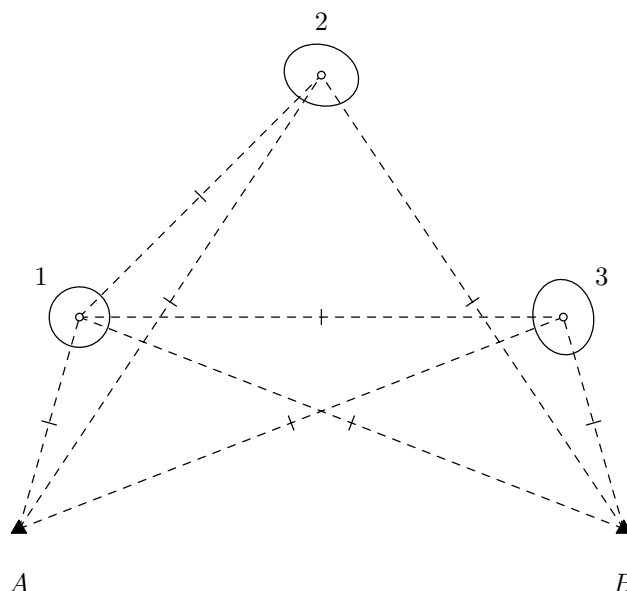
$$\mathbf{C}_{(D)} = \begin{bmatrix} 39997.088 \\ 39992.790 \\ 39992.276 \\ 39992.276 \\ 39992.790 \\ 39997.088 \\ 39993.601 \\ 39995.475 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.002 \\ -0.005 \\ -0.005 \\ 0.002 \\ 0.007 \\ 0.004 \\ -0.002 \\ 0.004 \end{bmatrix}.$$

Udjævningen resulterer i følgende koordinattilvækster og residualer

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.004 \\ 0.004 \\ 0.007 \\ 0.002 \\ 0.006 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} -0.003 \\ 0.004 \\ 0.000 \\ 0.002 \\ -0.001 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ -0.004 \end{bmatrix}.$$

Punkt	Y [m]	X [m]
1	170.000	230.004
2	250.004	150.007
3	170.002	70.006

Tabel 6.5: Estimerede koordinater.



Figur 6.4: Fastholdt afstandsnet med konfidensellipser, skala 1:1.

Den fastholdte udjævning afsluttes med en global test. Variansfaktoren og teststørrelsen bestemmes til henholdsvis $\hat{\sigma}_0^2 = 0.94$ og $w = 1.9$. Testen gennemføres atter på 5 % signifikansniveau, hvorfor følgende betingelse igen skal være opfyldt, for at H_0 kan accepteres:

$$\begin{aligned} \chi_{(u,\alpha/2)}^2 < w < \chi_{(u,1-\alpha/2)}^2 \\ \chi_{(2,0.025)}^2 < w < \chi_{(2,0.975)}^2 \\ 0.1 < w < 7.4. \end{aligned}$$

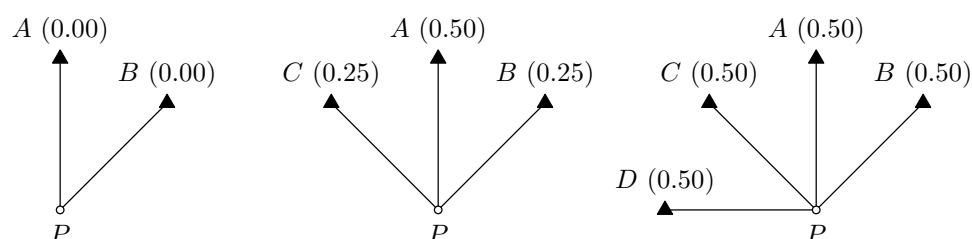
Da betingelsen er opfyldt, accepteres H_0 for den fastholdte udjævning. $\diamond$

6.3 Redundanstal

Hvis et net ikke er overbestemt, er antallet af overbestemmelser nul, og alle residualer er ligeledes nul. Residualerne er nul, da alle observationer er nødvendige for at bestemme nettet. Et sådant ikke-overbestemt net er fuldstændig upålideligt. Grove fejl kan ikke afsløres, da alle observationer indgår i nettets bestemmelse. Overbestemmelser/residualer spiller derfor en afgørende rolle for et nets pålidelighed. Afsnittet redegør for, hvordan den enkelte observation bidrager til den samlede overbestemmelse af nettet. Afsnittet gælder kun uafhængige observationer. Afsnittet indledes med et ek-

sempel.

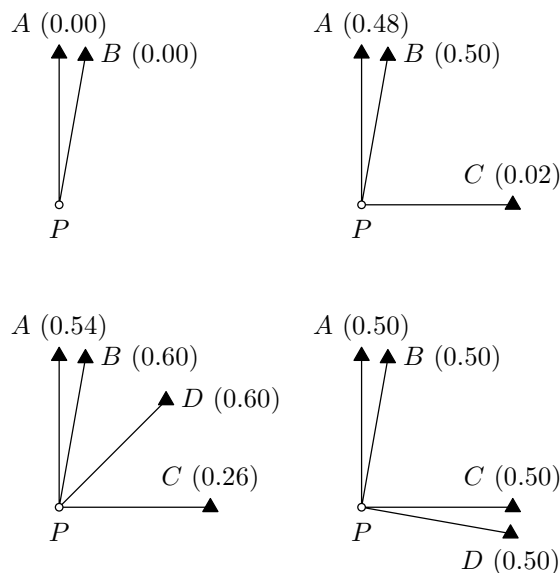
Eksempel 6.5 Et punkt, P , bestemmes ved bueskæring ved at måle afstande til en række punkter med kendte koordinater. Der ses på forskellige situationer for at illustrere, at pålidelighed er knyttet til nettets geometri. På netskitsserne angives *redundanstal* i parantes. Redundanstal udtrykker, hvor overbestemt nettet er. Redundanstal kan antage værdier mellem 0 og 1; jo større redundanstal jo bedre.



Figuren viser bestemmelsen af punkt P ved hjælp af henholdsvis to, tre og fire afstande. I første situation er P akkurat bestemt, og der er således ingen overbestemmelser i nettet. En grov fejl på en af de to afstande vil ikke kunne afsløres. I anden situation er der tilføjet ydeligere en afstand, og der er nu en overbestemmelse. Hver observation er nu *kontrollabel*, hvilket vil sige, at enhver af de tre observationer kan fjernes, og punkt P kan stadig bestemmes. Nettet er dog stadig ikke tilstrækkeligt pålideligt, da en grov fejl blandt de tre afstande ikke kan lokaliseres.

Skæring af observation B og C giver den bedste skæring i punkt P . En skæring, der inddrager observation A , vil ikke være ligeså god grundet geometrien i nettet. Observation A er derfor ikke så vigtig for bestemmelsen af P som de to øvrige observationer. En grov fejl i observation A vil derfor lettere kunne afsløres end en grov fejl på en af de andre observationer. Observation A har derfor et større redundanstal.

I tredje situation er P bestemt ved hjælp af fire afstande. Observationerne er nu fordelt således, at de parvis giver lige gode skæringer i P . Redundanstallene er derfor ens. En grov fejl vil nu med sikkerhed kunne lokaliseres, og nettet har derfor en tilfredsstillende pålidelighed.



Næste figur viser fire andre eksempler på bestemmelse af P . I første situation er punktet igen kun akkurat bestemt, og der er ingen overbestemmelser. I anden situation er tilføjet en tredje afstand. Geometrien mellem observation A og B er svag, men observationerne kontrollerer hinanden. En grov fejl i enten A eller B vil kunne afsløres af den anden observation. Observationerne har derfor høje redundanstal. Observation C er vigtig for bestemmelsen af P , men en grov fejl i C kan ikke afsløres af de to øvrige observationer, hvorfor C har et lavt redundanstal.

I tredje situation bidrager observation D til at kontrollere observation C , hvorfor redundanstallet for C er steget.

I fjerde og sidste situation er geometrien mellem A og B og mellem C og D svag. Observationerne kontrollerer dog parvist hinanden, hvorfor pålideligheden af nettet er tilfredsstillende. $\diamond$

Residualerne spiller en central rolle ved bestemmelsen af redundanstal. Som nævnt tidligere anvender Baarda σ_0^2 istedet for $\hat{\sigma}_0^2$. A posteriori kovariansmatricen for residualerne reduceres derfor til kofaktormatricen $\mathbf{Q}_{\hat{r}}$, jævnfør (6.2)

$$\mathbf{Q}_{\hat{r}} = \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T,$$

der omskrives til

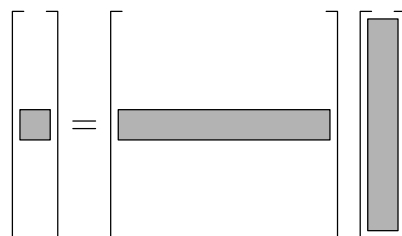
$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\hat{r}} - \mathbf{C}^{-1} &= -\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T \\ -\mathbf{Q}_{\hat{r}} + \mathbf{C}^{-1} &= \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Redundanstal er tæt knyttet til residualerne. Udtrykket for redundanstal udledes derfor af udtrykket for residualerne (2.21)

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{b} - \mathbf{b},\end{aligned}$$

der omskrives ved hjælp af (6.4)

$$\begin{aligned}&= (-\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{r}}} + \mathbf{C}^{-1})\mathbf{C}\mathbf{b} - \mathbf{b} \\ &= -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{r}}}\mathbf{C}\mathbf{b} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{b} - \mathbf{b} \\ &= -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{r}}}\mathbf{C}\mathbf{b}.\end{aligned}\tag{6.5}$$



Figur 6.5: Illustration af bestemmelse af ét residual ved formel (6.5).

Formel (6.5) og figur (6.5) viser residualernes afhængighed af observationerne. Hvert residual er funktion af samtlige observationer, hvorfor hvert residual også påvirkes af alle de grove fejl, der måtte være i nettet. Det er derfor ikke sikkert, at det største residual tilhører observationen med den største grove fejl. Matricen $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{r}}}\mathbf{C}$ benævnes $\mathbf{R}$.

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{r}}}\mathbf{C}.\tag{6.6}$$

Følgende egenskaber er knyttet til $\mathbf{R}$:

- $\mathbf{R}$ er idempotent; $\mathbf{R} = \mathbf{R}^2$.
- $\mathbf{R}$ er singular, og rangen af $\mathbf{R}$ er lig antallet af overbestemmelser, u .

For en idempotent matrix gælder endvidere, at rangen er lig sporet af matricen, det vil sige, at rangen er lig summen af matricens diagonalelementer. Det i' te diagonalelement i $\mathbf{R}$ benævnes ρ_i og er redundanstallet for den i' te

observation. Antallet af overbestemmelser er derfor lig summen af redundanstallene

$$u = \sum_{i=1}^m \rho_i.$$

Redundanstallene angives med symbolet ρ , der ligeledes bruges som symbol for korrelationskoefficienter, se afsnit 5.2.6. Dette bør dog ikke give anledning til problemer. Da $\mathbf{C}$ er diagonal, gælder endvidere

$$\rho_i = \hat{q}_{r_i}^2 c_i. \quad (6.7)$$

- Det i 'te redundanstal repræsenterer bidraget fra den i 'te observation til det samlede antal overbestemmelser.
- Det i 'te redundanstal angiver i hvor høj grad den i 'te observation kontrollerer og bliver kontrolleret af andre observationer i udjævningen.
- Redundanstal kan antage værdier mellem 0 og 1. Ved udjævning af GPS vektorer indgår vektorernes komponenter som selvstændige observation. En GPS vektor bidrager derfor med tre observationer. Hver komponent har et redundanstal mellem 0 og 1. Redundanstallet for vektoren er summen af redundanstallene for de tre komponenter. Redundanstallet for en GPS vektor kan derfor antage værdier mellem 0 og 3.
- Hvis $\rho_i = 1$
 - er den i 'te observation 100% overbestemt.
 - er den i 'te observation ikke nødvendig for at bestemme nettet.
 - er den i 'te observation 100% kontrollabel; 100% af observationens fejl viser sig i residualet.
 - kan rigtigheden af den i 'te observation kontrolleres af andre observationer.
- Hvis $\rho_i = 0$
 - er den i 'te observation 0% overbestemt.
 - er den i 'te observation nødvendig for at bestemme nettet; udjævningen kan ikke gennemføres uden denne observation.
 - er den i 'te observation 0% kontrollabel; 0% af observationens fejl viser sig i residualet.

- kan rigtigheden af den i 'te observation ikke kontrolleres af andre observationer.

Jo tættere redundanstal er på 1 jo bedre, idet lave redundanstal indikerer svag geometri i nettet. Redundanstallene bør derfor undersøges for at vurdere, om nettet bør styrkes. (Caspary, 1988) angiver typiske redundanstal for forskellige typer af net:

Polygoner:	$\rho_i = 0.1 - 0.2$
Afstandsnet:	$\rho_i = 0.3 - 0.6$
Afstands- og retningsnet:	$\rho_i = 0.5 - 0.8$
Geometrisk nivellement:	$\rho_i = 0.2 - 0.5$

Generelt bør ρ_i ikke være lavere end 0.3 for velkontrollerede net med flere observationstyper, og gennemsnittet af redundanstallene bør være omkring 0.5. Det gennemsnitlige redundanstal er et fornuftigt mål for den globale pålideligheden i nettet forudsat at store og små redundanstal er jævnt fordelt i nettet.

Redundanstal for retnings- og afstandsnet er afhængige af nettets geometri. Det forholder sig anderledes med geometriske nivellementsnet og GPS net. Redundanstal for disse observationstyper er ikke afhængige af nettes geometri, men derimod af antallet af observationer per station. (Leick og Emmons, 1994) angiver, at mere end fire GPS vektorer per station sikrer et redundanstal større end 0.5.

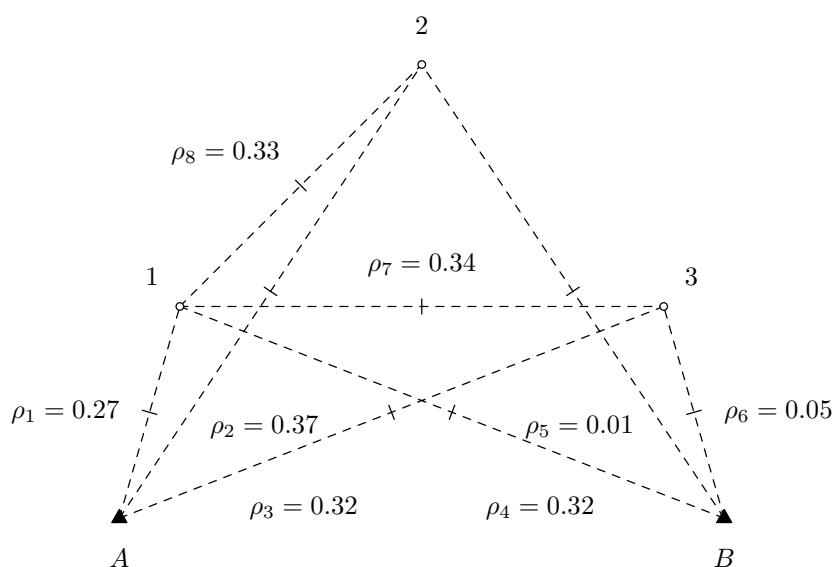
A matricen indgår i beregningen af $\mathbf{Q}_f$, der igen bruges ved beregning af redundanstal, jævnfør (6.2) og (6.6). **A** afspejler nettets geometri, og matricens struktur og indhold er derfor afhængig af hvilke punkter, der fastholdes i nettet. Redundanstallene for et sæt observationer er derfor forskellige afhængigt af om observationerne indgår i fri udjævning eller en fastholdt udjævning! Ved fastholdte udjævninger fås forskellige redundanstal afhængigt af hvilke punkter, der fastholdes. Eksempelvis vil en observation mellem to fastholdte punkter have et redundanstal på 1, da punkterne netop er fastholdte, og observationen er derfor overhovedet ikke nødvendig for bestemmelse af punkternes koordinater. Hvis de to punkter ikke fastholdes, har observationen et redundanstal mindre end 1, da den nu indgår i bestemmelsen af punkterne. Redundanstallene for et net bør være tilfredsstillende, hvad enten nettet udjævnes som frit eller fastholdt.

Redundanstal for et net bør først vurderes, efter observationer med grove fejl er fjernet. Ved beregning af redundanstal indgår kun **A** og **C**, jævnfør (6.2) og (6.6). Disse matricer opstilles uden brug af de aktuelle observationer.

For at opstille matricerne er det blot nødvendigt at vide hvilke observationer, der foretages mellem punkterne i nettet. Endvidere skal observationernes præcision kendes. Redundanstal er derfor uafhængige af, om der er grove fejl blandt observationerne. Hvis redundanstallene vurderes før fejlbehæftede observationer er fjernet, vil redundanstallene give et for optimistisk billede af nettet, da **A** og **C** vil indeholde information om de fejlbehæftede observationer.

Eksempel 6.6 Fortsat fra eksempel 6.4. Redundanstallene for afstandsnettet bestemmes. Kofaktormatricen for residualerne blev opstillet i eksempel 6.2, hvorfor **R** matricen umiddelbart kan beregnes efter (6.6). Diagonalelementerne i **R**, der er redundanstallene, fremgår af tabel (6.6). Eksempelvis bestemmes redundanstallet for den første observation ved

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \hat{q}_{r_1}^2 c_1 \\ &= 0.664 \cdot 10^{-5} \times 39997.088 \\ &= 0.27.\end{aligned}$$



Figur 6.6: Afstandsnet med redundanstal.

Observation	Fra	Til	b_i [m]	σ_{b_i} [m]	ρ_i
b_1	A	1	72.803	0.005	0.27
b_2	A	2	180.273	0.005	0.37
b_3	A	3	193.127	0.005	0.32
b_4	B	1	193.134	0.005	0.32
b_5	B	2	180.285	0.005	0.01
b_6	B	3	72.805	0.005	0.05
b_7	1	3	159.998	0.005	0.34
b_8	1	2	113.141	0.005	0.33

Tabel 6.6: Kvalitetsudtryk for afstandsnet.

Observation b_1 , der forbandt punkt 2 og punkt 3, blev tidligere fjernet fra udjævningen på grund af en grov fejl. Punkt 2 er nu bestemt af tre afstande. Skæringen af afstandene fra punkt A og punkt 1 er meget spids og giver derfor en usikker bestemmelse af punkt 2. Den tredje afstand fra punkt B er derfor meget vigtig for bestemmelsen af punkt 2. Denne afstand er imidlertid ikke kontrolleret af andre observationer, hvorfor redundanstallet for b_5 er meget lavt. Bestemmelsen af punkt 2 er ikke pålidelig.

Lignende forhold gør sig gældende for bestemmelsen af punkt 3. I denne situation er det b_6 , der er vigtig for bestemmelsen af punkt 3, men heller ikke denne observation er kontrolleret af andre observationer, hvorfor redundanstallet er lavt. De øvrige redundanstal er cirka 0.3, hvilket er tilfredsstillende. Det gennemsnitlige redundanstal er 0.25. Udfra redundanstallene kan det vurderes, om dele af nettet bør styrkes ved at foretage ydeligere målinger. Den svage geometri i nettet omkring punkt 2 og punkt 3 kan styrkes ved at genmåle afstanden mellem disse punkter. $\diamond$

6.4 Variansestimation

Hvis den globale test forkastes, kan grunden være, at den stokastiske model ikke er korrekt. Afsnittet redegør for, hvordan modellen kan søges forbedret. Den stokastiske model er repræsenteret af Σ_b , der er a priori kovariansmatrixen for observationerne. Det er hidtil antaget, at de stokastiske egenskaber ved observationerne er korrekt beskrevet af denne matrix. Denne antagelse holder dog næppe i praksis. Ved opstilling af Σ_b kommer informationen om a priori spredningerne fra mange kilder: resultatfiler fra beregning af GPS vektorer, instrumentspecifikationer, egne erfaringer samt formeludtryk for spredningerne. Disse informationer giver ikke en komplet beskrivelse af vir-

keligheden, hvorfor Σ_b heller ikke gør det. Efter udjævningen beregnes $\hat{\sigma}_0^2$ efter (4.1)

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{r}}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{r}}}{m - n}.$$

Variansfaktoren bruges til at vurdere udjævningen, jævnfør afsnit 6.1. Hvis der indgår forskellige observationstyper i udjævningen, hvilket der ofte gør, kan der i denne sammenhæng opstå et problem. Problemet består i, at de forskellige observationstyper ikke nødvendigvis er vægtet korrekt i forhold til hinanden. Hvis dette er tilfældet, er vægtmatricen $\mathbf{C}$ ikke korrekt, og det samme gælder dermed også $\hat{\sigma}_0^2$, jævnfør (4.1). Det er ikke muligt alene på baggrund af $\hat{\sigma}_0^2$ at vurdere, om observationstyperne er vægtet korrekt i forhold til hinanden. Forkert vægtning af blot en gruppe observationer kan resultere i, at $\hat{\sigma}_0^2$ ikke er repræsentativ for vægtningen af de øvrige observationstyper i udjævningen.

Variansfaktoren, $\hat{\sigma}_0^2$, er en generel faktor, der omfatter hele udjævningen. Det er muligt at beregne en faktor for hver enkel observationstype

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{\hat{\mathbf{r}}_k^T \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{r}}_k}{\sum \rho_k}, \quad (6.8)$$

hvor indeks k angiver den k' te observationstype. Tælleren er den vægtede kvadratsum af de residualer, der hører til den k' te observationstype, og nævneren er summen af redundanstallene, der hører til den k' te observationstype. For at den generelle variansfaktor skal være korrekt, skal faktorerne for hver enkel observationstype være ens eller næsten ens. Dette sikres med *variansestimation*. For hver gruppe af observationer i udjævningen beregnes en variansfaktor, og det bestemmes, om denne adskiller sig fra $\hat{\sigma}_0^2$. Hvis dette er tilfældet for den k' te observationstype, skaleres de tilhørende vægte i vægtmatricen med skalarer s_k

$$s_k = \frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_k^2} = \frac{1}{\hat{\sigma}_k^2}. \quad (6.9)$$

Variansfaktorerne for alle observationstyper vurderes og vægtene skaleres om nødvendigt. Hvis vægtene for mindst en observationstype er blevet skaleret, genberegnes udjævningen. De enkelte observationstypers vægtning vurderes atter, og denne proces fortsættes, indtil alle variansfaktorer konvergerer mod 1, det vil sige $\hat{\sigma}_0^2 \approx \hat{\sigma}_k^2 \approx 1$. Vægtene skaleres således iterativt indtil variansfaktorerne alle konvergerer mod 1. Antallet af iterationer, der skal

gennemløbes, afhænger dels af, hvor tæt a priori vægtene er på de korrekte værdier og dels af antallet af observationer.

Variansestimation kan ikke alene bruges på forskellige observationstyper, men lige såvel på observationer af samme type, der er vægtet forskelligt. Variansestimation bør ikke anvendes, når antallet af overbestemmelser er mindre end 20 for hver observationstype. Som det var tilfældet med data snooping, bør variansestimation kun bruges i forbindelse med en fri/minimal fastholdt udjævning, da residualerne ellers vil øges på grund af netspændinger. Det er tilrådeligt at vurdere om de endelige vægte er rimelige i forhold til a priori værdierne. Variansestimation forudsætter, at fejlene i observationsmaterialet er normalfordelt, hvilket betyder, at grove fejl må fjernes i forvejen. Data snooping skal derfor anvendes før variansestimation. Hvis data snooping ikke anvendes, og der er grove fejl blandt observationerne, vil nogle residualer blive store. Dette betyder, at en eller flere af variansfaktorerne bliver store. De pågældende observationstyper vil derfor blive kraftigt nedvægtet ved variansestimation. Dette kan efterfølgende betyde, at data snooping ikke finder de grove fejl på grund af disses nedvægtning.

Eksempel 6.7 En afstand ønskes bestemt med stor præcision. Den er derfor målt ti gange med en afstandsmåler med en specificeret grundfejl på 2 mm. Senere er den atter målt ti gange med en afstandsmåler med en specificeret grundfejl på 5 mm. Afstandsafhængige fejl ignoreres, da der er tale om en kort afstand. Spredningerne på observationerne er derfor henholdsvis 2 mm og 5 mm, idet bidrag fra centreringspredning antages at være nul.

Observation	b_i [m]	σ_{b_i} [m]	Observation	b_i [m]	σ_{b_i} [m]
b_1	87.397	0.002	b_{11}	87.392	0.005
b_2	87.391	0.002	b_{12}	87.405	0.005
b_3	87.389	0.002	b_{13}	87.394	0.005
b_4	87.397	0.002	b_{14}	87.394	0.005
b_5	87.389	0.002	b_{15}	87.400	0.005
b_6	87.398	0.002	b_{16}	87.401	0.005
b_7	87.395	0.002	b_{17}	87.392	0.005
b_8	87.386	0.002	b_{18}	87.392	0.005
b_9	87.399	0.002	b_{19}	87.391	0.005
b_{10}	87.390	0.002	b_{20}	87.398	0.005

Tabel 6.7: Observationer og a priori spredninger.

Den matematiske model for udjævningsproblemet er simpel, idet den søgte afstand direkte er observeret

$$\hat{x} = b_i + \hat{r}_i.$$

Designmatricen, $\mathbf{A}$, er en søjlevektor med 20 ettaller, $\mathbf{b}$ indeholder observationerne og $\mathbf{C}$ er en 20×20 diagonal matrix. De ti første diagonalelementer i $\mathbf{C}$ er $\frac{1}{0.002^2}$, og de ti sidste er $\frac{1}{0.005^2}$.

Afstanden estimeres ifølge (2.20), residualerne bestemmes efter (2.21) og dernæst bestemmes variansfaktoren ifølge (4.1). Antallet af overbestemmelser, $u = m - n$, er 19.

$$\hat{\sigma}_0^2 = 3.09.$$

Der udføres en global test for at vurdere udjævningen. Teststørrelsen opstilles efter (6.1)

$$w = 58.7.$$

Testen foretages på 5 % signifikansniveau, hvorfor følgende betingelse skal være opfyldt, for at H_0 kan accepteres.

$$\begin{aligned} \chi_{(u, \alpha/2)}^2 < w < \chi_{(u, 1-\alpha/2)}^2 \\ \chi_{(19, 0.025)}^2 < w < \chi_{(19, 0.975)}^2 \\ 9.0 < w < 32.8. \end{aligned}$$

Da betingelsen ikke er opfyldt, forkastes H_0 . De kritiske værdier er bestemt ved lineær interpolation i tabellen i appendiks B. Det konstateres ved data snooping, at der ikke er grove fejl blandt observationerne. Det undersøges derfor med varianssestimation, om de to gange ti observationer er vægtet korrekt i forhold til hinanden.

Redundanstillene for udjævningen bestemmes efter (6.7), og variansfaktorerne for de to observationsgrupper estimeres efter (6.8). Til første observationsgruppe hører observationerne med a priori spredninger på 0.002 m, og til den anden observationsgruppe hører observationerne med a priori spredninger på 0.005 m.

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1^2 &= 5.26 \\ \hat{\sigma}_2^2 &= 1.08 \end{aligned}$$

Der er et klart misforhold mellem $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ og $\hat{\sigma}_2^2$. Dette oprettes med varianssestimation. Skalarerne til skalering af $\mathbf{C}$ bestemmes efter (6.9)

$$\begin{aligned} s_1 &= 0.1900 \\ s_2 &= 0.9298. \end{aligned}$$

De ti første vægte skales med s_1 og de ti sidste skales med s_2 . Herefter beregnes udjævningen påny, og $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ og $\hat{\sigma}_2^2$ beregnes og vurderes atter. Forløbet itereres tre gange inden variansfaktorerne er konvergeret mod 1.

Iteration	$\hat{\sigma}_0^2$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$
1	3.09	5.26	1.08
2	0.97	1.04	0.90
3	1.00	1.01	0.99

Tabel 6.8: forløb af variansestimation.

De to observationsgrupper er nu vægtet korrekt i forhold til hinanden. Det må vurderes, om de fundne vægte er rimelige. Udfra vægtmatricen, $\mathbf{C}$, bestemmes spredningen for den i 'te observation ved

$$\sigma_{b_i} = \sqrt{\frac{1}{c_i}}.$$

Observation	σ_{b_i} [m] a priori	σ_{b_i} [m] var.est.	Observation	σ_{b_i} [m] a priori	σ_{b_i} [m] var.est.
b_1	0.002	0.005	b_{11}	0.005	0.005
b_2	0.002	0.005	b_{12}	0.005	0.005
b_3	0.002	0.005	b_{13}	0.005	0.005
b_4	0.002	0.005	b_{14}	0.005	0.005
b_5	0.002	0.005	b_{15}	0.005	0.005
b_6	0.002	0.005	b_{16}	0.005	0.005
b_7	0.002	0.005	b_{17}	0.005	0.005
b_8	0.002	0.005	b_{18}	0.005	0.005
b_9	0.002	0.005	b_{19}	0.005	0.005
b_{10}	0.002	0.005	b_{20}	0.005	0.005

Tabel 6.9: A priori spredninger og spredninger fra variansestimation.

Anden observationsgruppe har korrekte a priori spredninger, da variansestimationen ikke ændrer på disse. Spredningerne til første observationsgruppe er ændret fra 2 mm til 5 mm. Instrumentet, der er brugt til at foretage de

ti første observationer, har derfor ikke en grundfejl på 2 mm som specificeret.

I dette tilfælde ændres estimatet for afstanden samt spredningen på denne ikke fra første til sidste iteration. Afslutningsvis gennemføres den globale test atter. Teststørrelsen har nu værdien

$$w = 19.0,$$

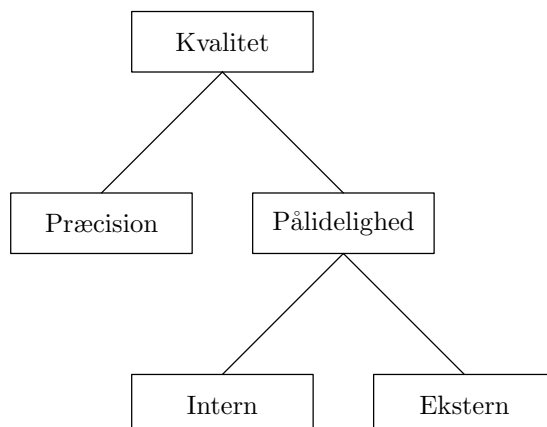
hvorfor testen denne gang accepteres. $\diamond$

6.5 Pålidelighed

Udjævningen forudsættes at have passeret den globale test, ligesom eventuelle observationer med grove fejl er fjernet fra observationsmaterialet eller erstattet med observationer uden grove fejl. Det forudsættes ligeledes, at forskellige observationstyper er vægtet korrekt i forhold til hinanden. Det er nu tid at vurdere udjævningens kvalitet. Hidtil er kvaliteten alene blevet udtrykt ved kovariansmatricen for elementerne, $\Sigma_{\hat{x}}$, der er givet ved (4.6). Udfra denne kan koordinaternes spredninger samt konfidensellipser beregnes. Kvalitet har derfor hidtil været ensbetydende med *præcision*, se afsnit 2.3. Det er imidlertid ikke tilstrækkeligt at kende et nets præcision for at vide sig sikker på, at kvaliteten er tilfredsstillende. Det er ligeså vigtigt at have kendskab til nettets *pålidelighed*. En samlet kvalitativ vurdering af en udjævning bør derfor omfatte både præcision og pålidelighed. Et meget præcist net er ikke i sig selv anvendeligt, hvis det ikke samtidigt er pålideligt. Hvis et net i et område er svagt bestemt (upålideligt), vil grove fejl i dette område ikke vise sig som tilsvarende store residualer; nettet er upålideligt. Ved hjælp af mål for pålideligheden er det muligt at bestemme nettets følsomhed overfor ikke-stokastiske fejl, det vil sige systematiske og grove fejl. Det blev indledningsvis nævnt, at eventuelle grove fejl forudsættes elimineret. Pålidelighed bruges *ikke* til at finde grove fejl i et net, men til at beskrive hvordan nettet reagerer, *hvis* der er grove fejl. Pålidelighed splittes op i to dele:

- Intern pålidelighed udtrykkes ved de mindste grove fejl, der akkurat kan afsløres ved tests.
- Ekstern pålidelighed er de ovenfor nævnte grove fejls indflydelse på de ukendte elementer.

Ligesom det var tilfældet med den globale test og med data snooping, bygger vurderingen af et nets pålidelighed på tests. Udtrykkene for pålidelighed gælder kun uafhængige observationer, da de bygger på redundanstal.



Figur 6.7: Opsplitning af kvalitet i præcision og pålidelighed.

6.5.1 Intern pålidelighed

Intern pålidelighed udtrykkes ved de mindste grove fejl, der kan afsløres med sandsynligheden $1 - \beta$. Den interne pålidelighed giver en grænse for hvor små grove fejl, der kan afsløres med sandsynligheden $1 - \beta$. Intern pålidelighed karakteriserer således nettets evne til at afsløre grove fejl. Størrelserne af disse fejl bestemmes ved hjælp af tests. Det forudsættes, at der højst er en grov fejl i observationssættet, hvorfor hver observation testes for sig. Det antages, at det er den i 'te observation, b_i , der er behæftet med den grove fejl, ∇b_i . Der opstilles en søjlevektor med de grove fejl, $\nabla \mathbf{b}$. Kun det i 'te element i vektoren er forskelligt fra nul.

$$\nabla \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \nabla b_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

For at bestemme den interne pålidelighed for den i 'te observation skal det afgøres, hvor stor ∇b_i skal være, før den kan afsløres. Dette spørgsmål afgøres ved en test. Nulhypotesen postulerer, at ∇b_i er så lille, at den ikke kan afsløres, mens den alternative hypotese postulerer, at fejlen kan afsløres:

$$\begin{aligned} H_0 : \nabla b_i &= 0 \\ H_A : \nabla b_i &\neq 0. \end{aligned}$$

Indflydelsen af den grove fejl, ∇b_i , på det tilsvarende residual, $\hat{r}_i$, betegnes ∇r_i . Teststørrelsen er givet ved

$$w_i = \frac{\nabla r_i}{\sqrt{\hat{q}_{r_i}^2}}.$$

Det ses, at hypoteserne og teststørrelsen minder meget om de, der blev anvendt ved data snooping. Ved beregning af teststørrelsen anvendes nu ændringen af residualen i stedet for selve residualen. Teststørrelsen omskrives til at udtrykke ændringen af residualen.

$$\nabla r_i = w_i \sqrt{\hat{q}_{r_i}^2}. \quad (6.10)$$

Ifølge (6.5) side 106 kan ∇r_i udtrykkes som

$$\nabla r_i = -\hat{q}_{r_i}^2 c_i \nabla b_i, \quad (6.11)$$

idet $\nabla \mathbf{b}$ kun indeholder nuller på nær ∇b_i , der står på den i 'te plads. Vægten for den i 'te observation er c_i , se afsnit 2.3. Ligningen omskrives ved hjælp af (6.7) til

$$\nabla r_i = -\rho_i \nabla b_i.$$

Den grove fejls indflydelse på residualen er redundanstallet multipliceret med den grove fejl. Ligningen viser, at kun en mindre del af fejlen afspejles i residualen, idet $0 < \rho_i < 1$. Jo større redundanstallet er for en observation, jo mere vil en grov fejl på observationen være synlig i residualen. Ligning (6.11) omskrives nu til at udtrykke den grove fejl

$$\nabla b_i = -\frac{\nabla r_i}{\hat{q}_{r_i}^2 c_i},$$

og (6.10) indsættes heri for ydeligere omskrivning

$$\begin{aligned} &= -\frac{w_i \sqrt{\hat{q}_{r_i}^2}}{\hat{q}_{r_i}^2 c_i} \\ &= -\frac{w_i}{\sqrt{\hat{q}_{r_i}^2 c_i}} \\ &= -\frac{w_i}{\sqrt{\hat{q}_{r_i}^2} \sqrt{c_i} \sqrt{c_i}}, \end{aligned}$$

hvilket ifølge (6.7) er lig

$$= -\frac{w_i}{\sqrt{\rho_i} \sqrt{c_i}}. \quad (6.12)$$

Vægten, c_i , er den reciprokke af variansen, σ_i^2 , hvorfor (6.12) kan omskrives til

$$\begin{aligned}\nabla b_i &= -\frac{w_i \sqrt{\sigma_i^2}}{\sqrt{\rho_i}} \\ &= -\frac{w_i \sigma_i}{\sqrt{\rho_i}}.\end{aligned}\tag{6.13}$$

Ifølge appendiks A skal teststørrelsen *mindst* have værdien δ_0 , for at en grov fejl kan afsløres på signifikansniveau α med sandsynlighed $1 - \beta$. Forskydningen af teststørrelsens fordelingskurve som følge af den grove fejl benævnes δ_0 , se appendiks A. Teststørrelsen i (6.13) udskiftes derfor med δ_0 , og samtidig fjernes minus tegnet, da det er uden betydning. Den mindste grove fejl, der kan afsløres, $\nabla_0 b_i$, ved den i 'te observation, er således givet ved

$$\nabla_0 b_i = \frac{\delta_0 \sigma_i}{\sqrt{\rho_i}}.\tag{6.14}$$

Et sådant udtryk kan opstilles for hver af de m observationer. Jo mindre $\nabla_0 b_i$ er, jo bedre er den interne pålidelighed. Som det fremgår, bygger intern pålidelighed på teststørrelsen, w_i , der omskrives til at udtrykke ∇b_i . Valg af signifikansniveau og testens styrke spiller en væsentlig rolle, idet disse er bestemmende for størrelsen af δ_0 og dermed for størrelsen af $\nabla_0 b_i$.

Som nævnt tidligere er redundanstal afhængige af, om der foretages en fri eller en fastholdt udjævning. Ved en fastholdt udjævning er redundanstallene endvidere afhængige af hvilke punkter, der fastholdes. Da redundanstallene indgår i bestemmelsen af den interne pålidelighed, er den interne pålidelighed ligeledes afhængig af hvilken type udjævning, der er gennemført.

Eksempel 6.8 Fortsat fra eksempel 6.6. Den interne pålidelighed for afstandsnettet bestemmes. For hver af de 8 observationer bestemmes den interne pålidelighed ved hjælp af (6.14). Værdierne fremgår af tabel 6.10. Eksempelvis er den interne pålidelighed for den første observation bestemt ved

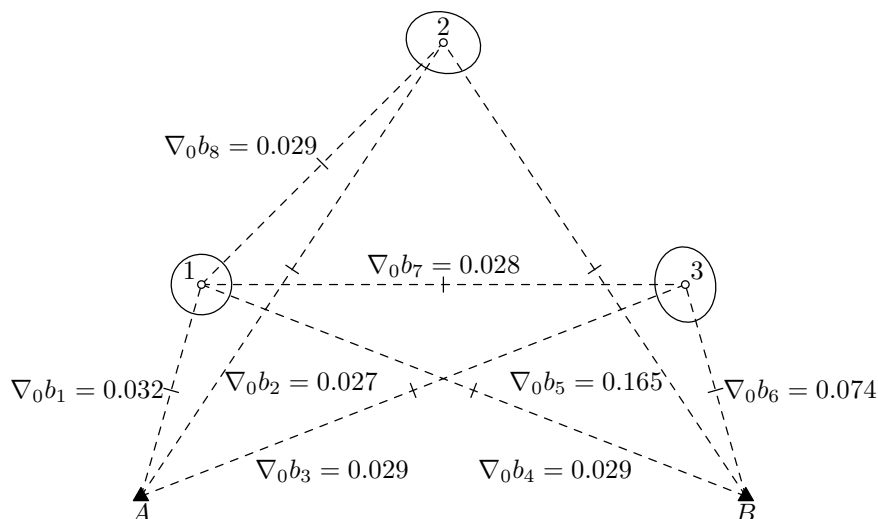
$$\begin{aligned}\nabla_0 b_1 &= \frac{\delta_0 \sigma_{b_1}}{\sqrt{\rho_1}} \\ &= \frac{3.3 \times 0.005 \text{ m}}{\sqrt{0.27}} \\ &= 0.032 \text{ m}.\end{aligned}$$

I eksempel 6.2 blev δ_0 bestemt til 3.3, da signifikansniveauet blev valgt til $\alpha = 0.05$, og testens styrke blev valgt til $1 - \beta = 0.9$.

Observation	Fra	Til	b_i [m]	σ_{b_i} [m]	ρ_i	$\nabla_0 b_i$ [m]
b_1	A	1	72.803	0.005	0.27	0.032
b_2	A	2	180.273	0.005	0.37	0.027
b_3	A	3	193.127	0.005	0.32	0.029
b_4	B	1	193.134	0.005	0.32	0.029
b_5	B	2	180.285	0.005	0.01	0.165
b_6	B	3	72.805	0.005	0.05	0.074
b_7	1	3	159.998	0.005	0.34	0.028
b_8	1	2	113.141	0.005	0.33	0.029

Tabel 6.10: Kvalitetsudtryk for afstandsnet.

På grund af de lave redundanstal for den femte og sjette observation er $\nabla_0 b_i$ for disse observationer større end for de øvrige observationer. Eksempelvis gælder det, at en grov fejl på den femte observation mindst skal være 0.165 m, før denne med 90 % sandsynlighed kan afsløres som en grov fejl. For den sjette observation er dette tal 0.074 m. For de øvrige observationer er den interne pålidelighed cirka 3 cm. Overordnet er den interne pålidelighed for nettet ikke tilfredsstillende. Pålideligheden vil kunne forbedres ved at genmåle afstanden mellem punkt 2 og punkt 3.



Figur 6.8: Fastholdt afstandsnet, intern pålidelighed og konfidensellipser, skala 1:1.

Figur 6.8 illustrerer, at både præcision og pålidelighed er nødvendig for at kunne vurdere et nets kvalitet. Hvis nettet alene vurderes med hensyn til præcision, er det tilfredsstillende, da konfidensellipserne er små og ensartede. Pålideligheden er imidlertid ikke tilfredsstillende, da nogle af $\nabla_0 b_i$ værdierne er store. $\diamond$

6.5.2 Ekstern pålidelighed

Intern pålidelighed udtrykker de mindste grove fejl, der kan afsløres. En god og homogen intern pålidelighed i nettet garanterer imidlertid ikke en god pålidelighed for de ukendte elementer i udjævningen. Da elementerne oftest er koordinater, sikrer en god intern pålidelighed således ikke pålidelige koordinater i nettet, jævnfør eksempel 6.9. Det er derfor vigtigt at afklare, hvilken effekt den interne pålidelighed har på koordinaterne. Effekten af den interne pålidelighed på elementerne benævnes ekstern pålidelighed. Det forudsættes lige som tidligere, at der højst er en grov fejl i observationsmaterialet. Den grove fejl antages at være den mindste grove fejl, der kan

afsløres

$$\nabla_0 \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \nabla_0 b_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Elementerne estimeres med formel (2.20)

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{b},$$

hvorfor effekten på *alle* elementer som følge af fejl på den *i*'te observation er

$$\nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C} \nabla_0 \mathbf{b}_i. \quad (6.15)$$

Søjlevektoren $\nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_i$ er således ændringerne af koordinaterne som følge af $\nabla_0 \mathbf{b}_i$. Der kan beregnes m sådanne vektorer, der viser effekten af $\nabla_0 \mathbf{b}_i$ for hver af de m observationer. Det kræver dog megen beregning at bestemme vektorerne, da (6.15) skal regnes m gange.

Eksempel 6.9 Fortsat fra eksempel 6.8. Nu bestemmes den eksterne pålidelighed for afstandsnettet. Ved hjælp af (6.15) opstilles otte $\nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_i$ søjlevektorer, der viser effekten af den interne pålidelighed på elementerne i udjævningen. Matricerne, der indgår i beregningen, er givet i eksempel 6.2.

	$\nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_1$ [m]	$\nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_2$ [m]	$\nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_3$ [m]	$\nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_4$ [m]	$\nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_5$ [m]	$\nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_6$ [m]	$\nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_7$ [m]	$\nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_8$ [m]
Y_1	0.024	0.007	-0.001	0.010	-0.008	0.001	0.001	-0.007
X_1	-0.003	-0.005	-0.008	0.017	0.006	0.008	0.008	0.005
Y_2	0.004	0.011	0.001	-0.001	0.105	-0.001	-0.001	0.005
X_2	-0.010	-0.014	-0.003	0.003	0.135	0.003	0.003	-0.011
Y_3	0.000	0.000	0.009	0.001	0.000	0.069	-0.001	0.000
X_3	-0.002	-0.003	-0.018	0.009	0.003	0.017	-0.010	0.003

Tabel 6.11: Ekstern pålidelighed bestemt ved (6.15).

Rækkerne i tabel 6.11 viser, hvordan de seks ukendte koordinater i udjævningen vil påvirkes af grove fejl ($\nabla_0 b_i$) for hver af de otte observationer. Søjlerne i tabellen er de otte $\nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_i$ vektorer. Eksempelvis viser anden søjle i tabellen, hvilken effekt $\nabla_0 b_1$ har på koordinaterne.

Generelt er den eksterne pålidelighed bedre end 1 cm. Ikke overraskende er effekten af grove fejl på den femte og sjette observation stor, når der ses på henholdsvis punkt 2 og punkt 3. Dette skyldes den svage geometri i denne del af nettet. Andre koordinater i nettet påvirkes dog ligeledes ret kraftigt af grove fejl på enkelte observationer. Dette virker måske overraskende, da den interne pålidelighed var ensartet for alle observationer på nær den femte og sjette, se tabel 6.10. Dette viser blot, at en god intern pålidelighed ikke sikrer en god ekstern pålidelighed. $\diamond$

Det er tungt at beregne de mange $\nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_i$ vektorer, og det er vanskeligt at overskue vektorerne. Af disse grunde foreslog Baarda at anvende den standardiserede længde af $\nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_i$ som mål for den eksterne pålidelighed for den i 'te observation. Den standardiserede længde, der benævnes $\bar{\delta}_{0i}$, udtrykker effekten af den interne pålidelighed på *alle* elementer. Ved at anvende $\bar{\delta}_{0i}$ som mål for den eksterne pålidelighed skal der kun beregnes m skalarer i stedet for m vektorer, som det er tilfældet, hvis $\nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_i$ anvendes som mål for ekstern pålidelighed.

$$\bar{\delta}_{0i}^2 = \frac{\nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{N} \nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_i}{\sigma_0^2}.$$

Da a priori variansfaktoren er 1, reduceres udtrykket til

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{0i}^2 &= \nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{N} \nabla_0 \hat{\mathbf{x}}_i \\ &= [\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C} \nabla_0 \mathbf{b}_i]^T \mathbf{N} [\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C} \nabla_0 \mathbf{b}_i] \\ &= [\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C} \nabla_0 \mathbf{b}_i]^T \mathbf{N} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C} \nabla_0 \mathbf{b}_i \\ &= [\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C} \nabla_0 \mathbf{b}_i]^T \mathbf{A}^T \mathbf{C} \nabla_0 \mathbf{b}_i \\ &= \nabla_0 \mathbf{b}_i^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C} \nabla_0 \mathbf{b}_i, \end{aligned}$$

der ifølge (6.4) kan omskrives til

$$\begin{aligned} &= \nabla_0 \mathbf{b}_i^T \mathbf{C} [\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{Q}_r] \mathbf{C} \nabla_0 \mathbf{b}_i \\ &= \nabla_0 \mathbf{b}_i^T \mathbf{C} [\mathbf{I} - \mathbf{Q}_r \mathbf{C}] \nabla_0 \mathbf{b}_i, \end{aligned}$$

der ifølge (6.6) kan omskrives til

$$= \nabla_0 \mathbf{b}_i^T \mathbf{C} [\mathbf{I} - \mathbf{R}] \nabla_0 \mathbf{b}_i.$$

Da kun det i 'te element i $\nabla_0 \mathbf{b}_i$ er forskelligt fra nul reduceres udtrykket til

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{0i}^2 &= \nabla_0 b_i c_i (1 - \rho_i) \nabla_0 b_i \\ &= \nabla_0 b_i^2 c_i (1 - \rho_i) \end{aligned}$$

Ifølge (6.14) omskrives udtrykket ydeligere til.

$$\begin{aligned} &= \frac{\delta_0^2 \sigma_i^2}{\sqrt{\rho_i^2}} c_i (1 - \rho_i) \\ &= \frac{\delta_0^2 (1 - \rho_i)}{\sqrt{\rho_i^2}}. \end{aligned}$$

Den eksterne pålidelighed for den i 'te observation er derfor givet ved

$$\bar{\delta}_{0i} = \delta_0 \sqrt{\frac{1 - \rho_i}{\rho_i}}. \quad (6.16)$$

Ved brug af (6.16) udtrykkes den eksterne pålidelighed ved m skalarer. Hvis de m skalarer er af samme størrelsesorden, er nettet homogent med hensyn til ekstern pålidelighed. For et veldesignet net bør $\bar{\delta}_{0i}$ være mindre end 10. For at have en høj ekstern pålidelighed (lille $\bar{\delta}_{0i}$) må redundanstallet være stort.

Redundanstal indgår i bestemmelsen af ekstern pålidelighed. Ekstern pålidelighed er derfor afhængig af hvilken type udjævning, der er gennemført, jævnfør side 108.

Eksempel 6.10 Fortsat fra eksempel 6.9. Den eksterne pålidelighed for afstandsnettet bestemmes atter men denne gang med (6.16) Eksempelvis bestemmes den eksterne pålidelighed for den første observation ved

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{01} &= 3.3 \sqrt{\frac{1 - 0.27}{0.27}} \\ &= 5.43. \end{aligned}$$

Observation	Fra	Til	b_i [m]	σ_{b_i} [m]	ρ_i	$\nabla_0 b_i$ [m]	$\bar{\delta}_{0i}$
b_1	A	1	72.803	0.005	0.27	0.032	5.43
b_2	A	2	180.273	0.005	0.37	0.027	4.31
b_3	A	3	193.127	0.005	0.32	0.029	4.81
b_4	B	1	193.134	0.005	0.32	0.029	4.81
b_5	B	2	180.285	0.005	0.01	0.165	32.83
b_6	B	3	72.805	0.005	0.05	0.074	14.38
b_7	1	3	159.998	0.005	0.34	0.028	4.60
b_8	1	2	113.141	0.005	0.33	0.029	4.70

Tabel 6.12: Kvalitetsudtryk for afstandsnet.

Den eksterne pålidelighed udtrykkes nu ved 8 tal fremfor 8 vektorer, hvilket giver et mere overskueligt billede af pålideligheden. Igen skiller den femte og den sjette observation sig ud fra de øvrige observationer. På grund af den svage geometri omkring punkt 2 og punkt 3 er nettets overordnede eksterne pålidelighed ikke tilfredsstillende. $\diamond$

6.6 A priori brug af tests

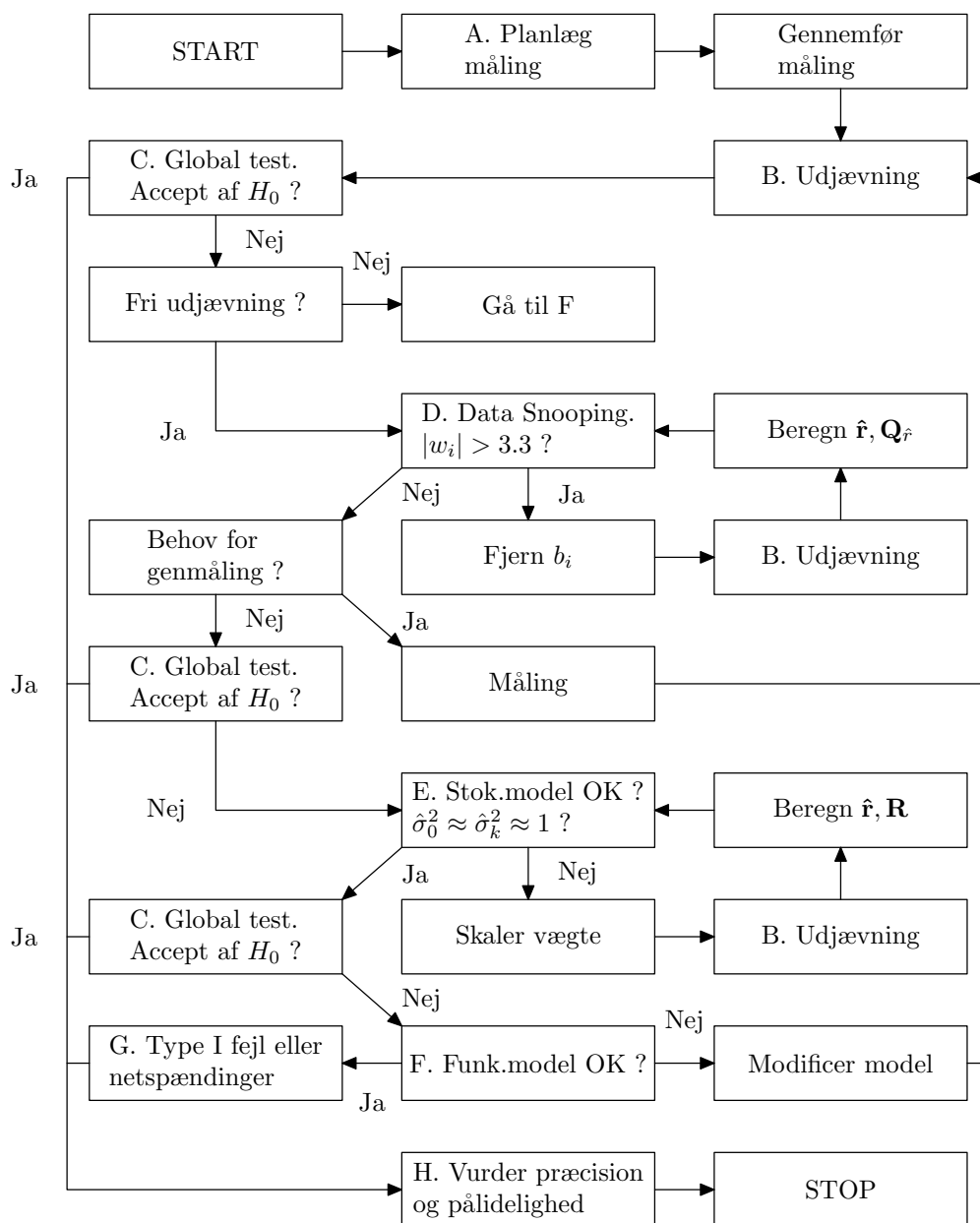
Hidtil har kapitlet omhandlet a posteriori kvalitetsvurdering af udjævninger, det vil sige, at kvaliteten er blevet vurderet, efter udjævningen er gennemført. En del af værktøjerne kan tillige bruges til at *planlægge* et net, før observationerne foretages. Det ses af udtrykkene for henholdsvis redundanstal (6.7), intern pålidelighed (6.14) og ekstern pålidelighed (6.16), at observationsvektoren, $\mathbf{b}$, ikke indgår i disse. De nævnte kvalitetsmål kan derfor bestemmes, før en eneste observation er foretaget. Når nettets geometri er planlagt, er det bestemt hvilke observationer, der skal foretages mellem hvilke punkter. Når tillige observationernes spredninger er estimeret, kan alle de nødvendige matricer for at beregne kvalitetsudtrykkene opstilles, og udtrykkene kan bestemmes. Nettets pålidelighed kan således vurderes inden målingerne foretages, og nettet kan eventuelt modificeres, hvis dette er nødvendigt. Denne a priori vurdering af nettets pålidelighed svarer til a priori vurderingen af nettets præcision, der er beskrevet i afsnit 4.5.

6.7 Skematisk fremstilling af testforløb

Figur 6.9 viser i hvilken rækkefølge de forskellige værktøjer, der er præsenteret i dette kapitel, anvendes. Nedenfor er der for flere af kasserne i figuren

givet henvisninger til afsnit, der beskriver indholdet. Bogstaverne henviser til figuren.

- A.** Nettet planlægges med de værktøjer, der er beskrevet i afsnit 4.5 og 6.6.
- B.** Observationerne udjævnes, se kapitel 2 og 3.
- C.** Global test udføres, se afsnit 6.1.
- D.** Grove fejl lokaliseres og fjernes, se afsnit 6.2.
- E.** Gyldigheden af den stokastiske model undersøges, se afsnit 6.4.
- F.** Gyldigheden af den funktionelle model undersøges.
- G.** Se appendiks A.
- H.** Udjævningens kvalitet vurderes, se kapitel 4, afsnit 6.3 og afsnit 6.5.

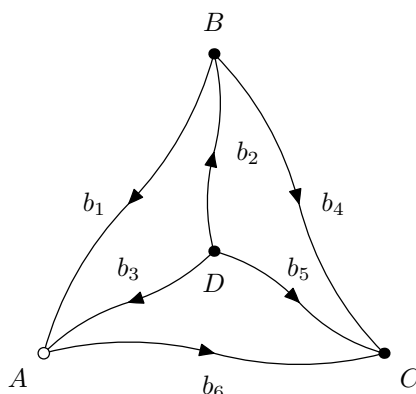


Figur 6.9: Udjævningsforløb.

6.8 Opgaver

Opgave 6.1 Der tages udgangspunkt i nivellementsnettet fra eksempel 2.2 side 8. Mellem fem punkter er observeret seks højdeforskelle ved geometrisk nivellement.

Fra punkt	Til punkt	Højdeforskel [m]	Spredning [m]
B	A	$b_1 = 1.207$	$\sigma_1 = 0.009$
D	B	$b_2 = 1.115$	$\sigma_2 = 0.007$
D	A	$b_3 = 2.305$	$\sigma_3 = 0.005$
B	C	$b_4 = 2.097$	$\sigma_4 = 0.008$
D	C	$b_5 = 3.203$	$\sigma_5 = 0.005$
A	C	$b_6 = 0.906$	$\sigma_6 = 0.008$



Figur 6.10: Nivellementsnet.

Nivellementsnettet ønskes først underkastet en fri udjævning. Koterne til de fire punkter er elementer i udjævningen. Elementerne vælges i følgende rækkefølge: H_A , H_B , H_C og H_D . Designmatricen og observationsvektoren

er derfor givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1.207 \\ 1.115 \\ 2.305 \\ 2.097 \\ 3.203 \\ 0.906 \end{bmatrix}.$$

Beregn den fri udjævning, se eventuelt eksempel 6.1 og (Borre, 1992) afsnit 6.2. Bestem $\mathbf{N}^+$, $\mathbf{x}^+$ og $\hat{\mathbf{r}}$.

Opgave 6.2 Undersøg om den frie udjævning af nivellementsnettet kan passere den globale test på 5 % signifikansniveauet.

Opgave 6.3 Undersøg ved hjælp af data snooping om nogle af observationerne må antages at være behæftede med grove fejl. Gennemfør testene med $\alpha = 5 \%$ og $\beta = 20 \%$.

Opgave 6.4 Gennemregn eksempel 6.7.

Opgave 6.5 Nivellementsnettet ønskes nu udjævnet med koten til punkt A fastholdt. Der anvendes samme a priori spredninger som i opgave 6.1. I følge eksempel 2.3 er design matricen nu givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestem redundanstallene for observationerne samt intern og ekstern pålidelighed. Anvend $\alpha = 5 \%$ og $\beta = 20 \%$.

Appendiks A

Testteori

Dette appendiks gengiver den testteori, der er nødvendig for at bestemme kritiske værdier ved Baardas tests. Teksten skal derfor ikke betragtes som en generel tekst om testteori.

Hypotese

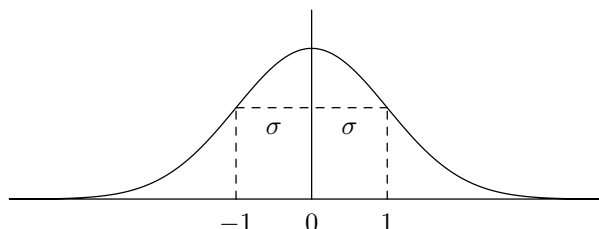
Data snooping og bestemmelsen af et nets pålidelighed bygger på tests, der skal afsløre, om en enkel observation i datasættet er behæftet med en grov fejl. Hypoteserne, der testes, er

$$\begin{aligned} H_0: & \text{ Den } i'\text{te observation er ikke behæftet med en grov fejl.} \\ H_A: & \text{ Den } i'\text{te observation er behæftet med en grov fejl.} \end{aligned}$$

Teststørrelsen, der bruges ved denne test, er det normaliserede residual, jævnfør (6.3)

$$w_i = \frac{\hat{r}_i}{\sqrt{\hat{q}_{r_i}^2}}.$$

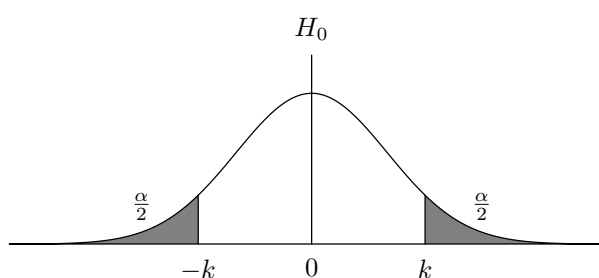
Teststørrelsen er standardnormalfordelt, $w_i \sim N(0, 1)$.



Figur A.1: Standardnormalfordeling.

Signifikansniveau, α

Formålet med testen er at afgøre, om H_0 skal accepteres eller forkastes. For at kunne afgøre dette, vælges et signifikansniveau, α . Når signifikansniveauet er valgt, kan de kritiske værdier, $\pm k$, for testen bestemmes ved tabelopslag.



Figur A.2: Kritiske værdier ved signifikansniveau α .

Intervalleret fra $-k$ til k benævnes konfidensintervallet. Hvis w_i ligger indenfor konfidensintervallet, accepteres H_0 . Hvis w_i ligger udenfor intervallet, forkastes H_0 .

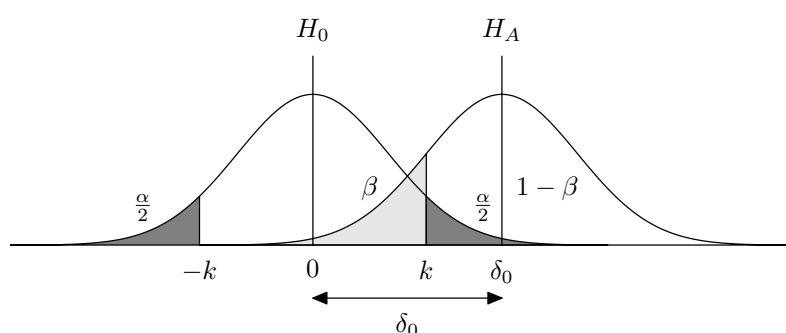
Hvis det antages, at H_0 er sand, det vil sige, at der ikke er en grov fejl på den i 'te observation, er det korrekt at acceptere H_0 , når w_i ligger i konfidensintervallet. Sandsynligheden for at acceptere H_0 , når den er sand, er $1 - \alpha$.

I $\alpha\%$ af tilfældene vil w_i dog ligge udenfor konfidensintervallet, selvom H_0 er sand. I disse tilfælde forkastes H_0 . Dette er en fejlagtig beslutning,

der benævnes en *Type I fejl*. Sandsynligheden for at begå en type I fejl er α .

Styrke af test, $1 - \beta$

Hvis det nu antages, at den i 'te observation er behæftet med en grov fejl, er teststørrelsen ikke længere standardnormalfordelt. Middelværdien ændres fra at være 0 til δ_0 . Fordelingen for teststørrelsen er nu $w_i \sim N(\delta_0, 1)$.



Figur A.3: Fordeling for nulhypotese og alternativ hypotese.

Forskydningen af fordelingskurven for den alternative hypotese i forhold til standardnormalfordelingen svarer til middelværdien for den alternative hypotese, δ_0 . Størrelsen af δ_0 bestemmes af størrelsen af den grove fejl.

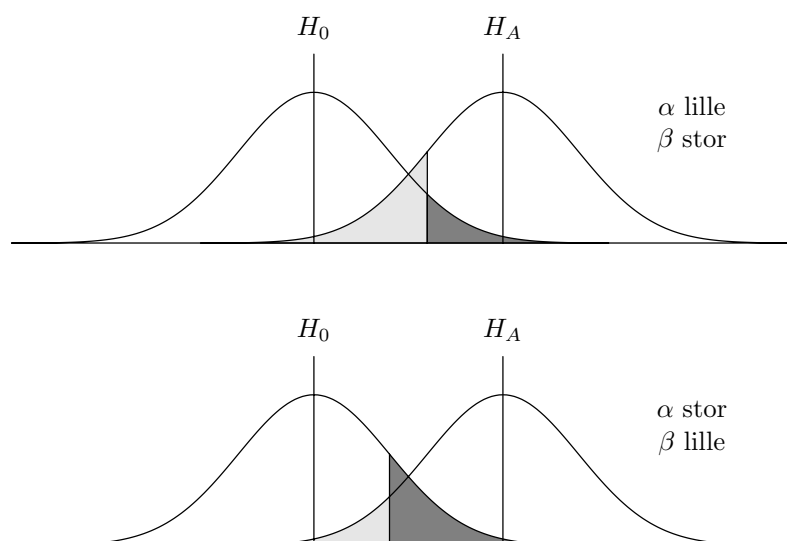
Arealet under H_A kurven til højre for k i figur A.3 er sandsynligheden for af acceptere H_A , når den er sand. Det er sandsynligheden for at finde den grove fejl, når denne er til stede. Denne sandsynlighed er $1 - \beta$ og kaldes *testens styrke*. Testens styrke er altså sandsynligheden for korrekt at støtte H_A , når denne er sand.

Arealet under H_A kurven til venstre for k er sandsynligheden for at understøtte H_A , når denne er falsk. Denne sandsynlighed β er med andre ord sandsynligheden for at acceptere H_0 , når denne ikke er sand. Den fejl, der hermed begås, benævnes en *Type II fejl*. Sandsynligheden for at begå en type II fejl er β .

	H_0 accepteres af test (H_A forkastes)	H_0 forkastes af test (H_A accepteres)
H_0 er sand (H_A er falsk)	Korrekt konklusion Sandsynlighed: $1 - \alpha$	Forkert konklusion Sandsynlighed: α Type I fejl
H_0 er falsk (H_A er sand)	Forkert konklusion Sandsynlighed: β Type II fejl	Korrekt konklusion Sandsynlighed: $1 - \beta$

Tabel A.1: Mulige udfald af test.

Det ses af tabel A.1, at for at træffe korrekte beslutninger ønskes små værdier for både α og β . Det er dog ikke muligt, at begge værdier samtidig er små, som det fremgår af figur A.4.

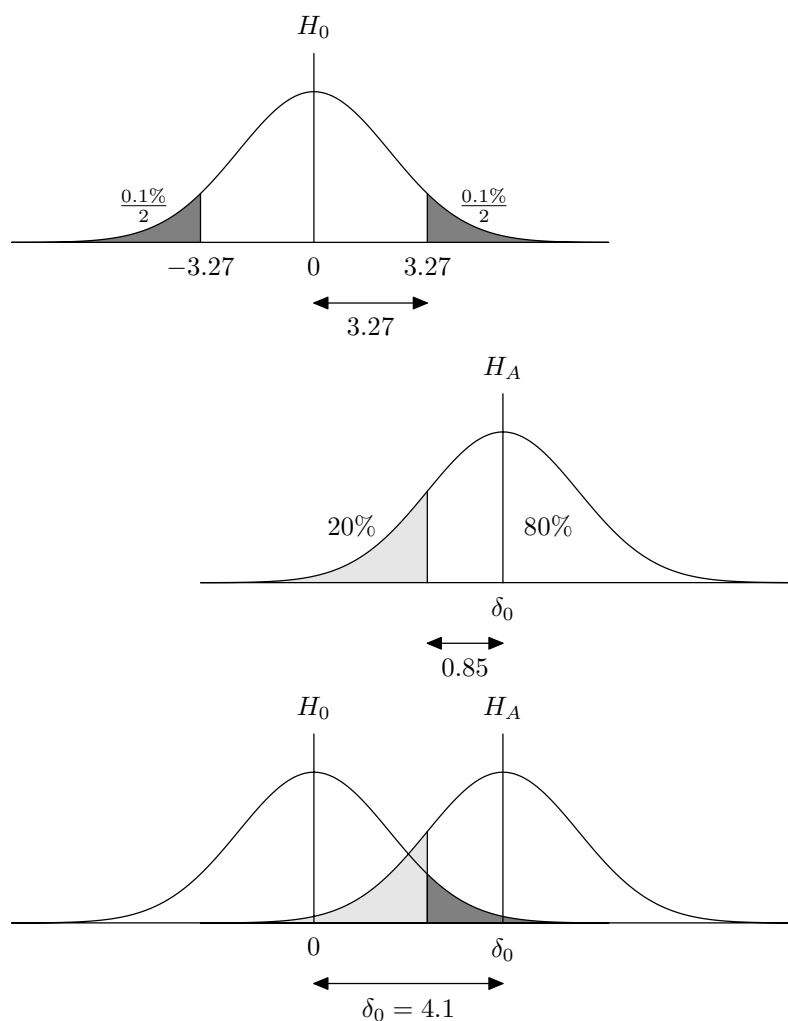


Figur A.4: Samspil mellem α og β .

Kritisk værdi

Som nævnt skyldes forskydningen af fordelingskurven fra 0 til δ_0 , at en grov fejl er tilstede. Størrelsen af den grove fejl kendes ikke, hvorfor δ_0 heller ikke kendes. Når δ_0 er ukendt, kan β ikke bestemmes, da δ_0 afgør hvor meget, de to fordelingskurver overlapper. Dette betyder, at sandsynligheden for

henholdsvis at finde en grov fejl når den er tilstede, og sandsynligheden for at forkaste H_0 , når den er sand, ikke kendes. Dette er ikke acceptabelt.



Figur A.5: Bestemmelse af δ_0 .

For at løse dette problem vælges først α og β , og det bestemmes dernæst hvor stor en værdi for δ_0 , der svarer hertil. Baarda foreslår $\alpha = 0.1\%$ og $\beta = 20\%$. Når α og β er fastlagt, er δ_0 en konstant, der kan beregnes. Ved opslag i en tabel for standardnormalfordelingen kan det aflæses, at de kritiske værdier svarende til $\alpha = 0.1\%$ er ± 3.27 . Dette er illustreret øverst i figur A.5. Ved opslag i den samme tabel kan den kritiske værdi for $\beta = 20\%$ bestemmes til 0.85. Værdien for δ_0 er summen af de to kritiske værdier, der

i dette tilfælde er 4.1.

Med valget af $\alpha = 0.1\%$ og $\beta = 20\%$ er Baarda højst villig til at begå type I fejl og type II fejl med sandsynligheder på henholdsvis 0.1% og 20% . Når middelværdien for fordelingskurven for den alternative hypotese er *mindst* 4.1, opfyldes disse betingelser. Med disse valg af α og β er den kritiske værdi i forbindelse med data snooping og bestemmelse af pålidelighed derfor [4.1]. Med denne kritiske værdi er sandsynligheden for at afsløre en grov fejl 80% på 0.1% signifikansniveauet.

Appendiks B

Kritiske værdier, χ^2 fordeling

u	$\chi^2_{.005}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.995}$
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.7	3.8	5.0	6.6	7.9
2	0.0	0.0	0.1	0.1	0.2	4.6	6.0	7.4	9.2	10.6
3	0.1	0.1	0.2	0.4	0.6	6.3	7.8	9.4	11.3	12.8
4	0.2	0.3	0.5	0.7	1.1	7.8	9.5	11.1	13.3	14.9
5	0.4	0.6	0.8	1.2	1.6	9.2	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.7	0.9	1.2	1.6	2.2	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	1.0	1.2	1.7	2.2	2.8	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.3	1.7	2.2	2.7	3.5	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.7	2.1	2.7	3.3	4.2	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.2	2.6	3.2	3.9	4.9	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
20	7.4	8.3	9.6	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2
110	75.5	78.5	82.9	86.8	91.5	129.4	135.5	140.9	147.4	152.0
120	83.8	86.9	91.6	95.7	100.6	140.2	146.6	152.2	159.0	163.7
130	92.2	95.5	100.3	104.7	109.8	151.0	157.6	163.5	170.4	175.3
140	100.7	104.0	109.1	113.7	119.0	161.8	168.6	174.6	181.8	186.8
150	109.1	112.7	118.0	122.7	128.3	172.6	179.6	185.8	193.2	198.3
160	117.7	121.4	126.9	131.8	137.5	183.3	190.5	196.9	204.5	209.8
170	126.3	130.1	135.8	140.9	146.8	194.0	201.4	208.0	215.8	221.2
180	134.9	138.8	144.7	150.0	156.2	204.7	212.3	219.0	227.1	232.6
190	143.5	147.6	153.7	159.1	165.5	215.4	223.2	230.1	238.3	244.0

Fortsættes på næste side

Fortsat fra forrige side

u	$\chi^2_{.005}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.995}$
200	152.3	156.4	162.7	168.3	174.8	226.0	234.0	241.1	249.5	255.2
210	161.0	165.3	171.8	177.5	184.2	236.7	244.8	252.0	260.6	266.5
220	169.7	174.2	180.8	186.7	193.6	247.3	255.6	263.0	271.7	277.8
230	178.5	183.1	189.9	195.9	203.0	257.9	266.4	273.9	282.8	289.0
240	187.3	192.0	199.0	205.1	212.4	268.5	277.1	284.8	293.9	300.2
250	196.2	200.9	208.1	214.4	221.8	279.0	287.9	295.7	304.9	311.4
260	205.0	209.9	217.2	223.7	231.2	289.6	298.6	306.6	316.0	322.5
270	213.9	218.9	226.4	232.9	240.7	300.2	309.3	317.4	327.0	333.6
280	222.8	227.9	235.5	242.2	250.1	310.7	320.0	328.2	338.0	344.7
290	231.7	236.9	244.7	251.6	259.6	321.3	330.7	339.1	348.9	355.8
300	240.7	246.0	253.9	260.9	269.1	331.8	341.4	349.9	359.9	366.9
310	249.6	255.0	263.1	270.2	278.5	342.3	352.1	360.7	370.8	377.9
320	258.6	264.1	272.3	279.6	288.0	352.8	362.7	371.4	381.8	388.9
330	267.6	273.2	281.6	288.9	297.5	363.3	373.4	382.2	392.7	399.9
340	276.6	282.3	290.8	298.3	307.0	373.8	384.0	393.0	403.6	410.9
350	285.6	291.4	300.1	307.6	316.5	384.3	394.6	403.7	414.5	421.9
360	294.7	300.5	309.3	317.0	326.1	394.8	405.2	414.5	425.3	432.9
370	303.7	309.7	318.6	326.4	335.6	405.3	415.9	425.2	436.2	443.8
380	312.8	318.8	327.9	335.8	345.1	415.7	426.5	435.9	447.1	454.8
390	321.8	328.0	337.2	345.2	354.7	426.2	437.0	446.6	457.9	465.7
400	330.9	337.2	346.5	354.6	364.2	436.6	447.6	457.3	468.7	476.6
410	340.0	346.3	355.8	364.1	373.8	447.1	458.2	468.0	479.5	487.5
420	349.1	355.5	365.1	373.5	383.3	457.5	468.8	478.7	490.4	498.4
430	358.2	364.7	374.4	382.9	392.9	468.0	479.3	489.3	501.2	509.3
440	367.3	373.9	383.8	392.4	402.4	478.4	489.9	500.0	511.9	520.2
450	376.5	383.2	393.1	401.8	412.0	488.8	500.5	510.7	522.7	531.0
460	385.6	392.4	402.5	411.3	421.6	499.3	511.0	521.3	533.5	541.9
460	385.6	392.4	402.5	411.3	421.6	499.3	511.0	521.3	533.5	541.9
470	394.8	401.6	411.8	420.7	431.2	509.7	521.5	532.0	544.3	552.7
480	403.9	410.9	421.2	430.2	440.7	520.1	532.1	542.6	555.0	563.6
490	413.1	420.1	430.6	439.7	450.3	530.5	542.6	553.2	565.8	574.4
500	422.3	429.4	439.9	449.1	459.9	540.9	553.1	563.9	576.5	585.2

Appendiks C

Svar til opgaver

Opgave 2.1

Koefficienterne til den rette linie er $a = 0.13$ og $b = 13.99$. De fire residualer bestemmes til

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} -0.02 \\ 0.02 \\ 0.02 \\ -0.01 \end{bmatrix}.$$

Opgave 2.2

Koterne til punkterne B , C og D bestemmes til $H_B = 7.977$, $H_C = 8.991$ og $H_D = 10.986$. Residualerne er

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} -0.001 \\ 0.001 \\ 0.012 \\ 0.012 \\ -0.013 \end{bmatrix}.$$

De korrigerede observationer beregnes til

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} -2.024 \\ -1.015 \\ 1.994 \\ -0.986 \\ 1.009 \end{bmatrix}.$$

Opgave 2.3

Vægtmatricen er

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2\,500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\,500 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterne til den rette linie estimeres til $a = 0.13$ og $b = 13.97$, og residualer er

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} -0.04 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ -0.02 \end{bmatrix}.$$

Opgave 2.4

Vægtmatricen for nivellementsobservationerne er

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 12\,500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10\,000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14\,815 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7\,018 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\,797 \end{bmatrix},$$

og koterne estimeres til $H_B = 7.978$, $H_C = 8.994$ og $H_D = 10.983$. Residualerne er

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0.001 \\ -0.001 \\ 0.007 \\ 0.015 \\ -0.016 \end{bmatrix},$$

og de korrigerede observationer kan beregnes til

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} -2.022 \\ -1.017 \\ 1.989 \\ -0.983 \\ 1.006 \end{bmatrix}.$$

Opgave 2.5

Vægtmatricen er identisk med den, der blev anvendt i opgave 2.4. $\mathbf{A}$ matricen, der er singular, er givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

og $\mathbf{G}$ matricen er givet ved

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Koterne til punkterne bestemmes til

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+ &= \mathbf{N}^+ \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{b} \\ &= \begin{bmatrix} 0.511 \\ -1.511 \\ -0.494 \\ 1.495 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Bemærk, at middelværdien af koterne er nul. Residualerne og de korrigerede observationer er identiske med de fra opgave 2.4.

Opgave 3.1

Når $x^0 = 1$ bliver lineariseringsfejlen $9 - 5 = 4$.

Opgave 3.3

Vægtmatricen for observationerne er

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 10\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 2\,500 & 0 \\ 0 & 0 & 4\,444 \end{bmatrix},$$

og de endelige koordinater til punkt P er $Y_P = 170.711$ og $X_P = 170.693$. Residualerne bestemmes til

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} -0.011 \\ -0.032 \\ -0.018 \end{bmatrix},$$

og de korrigerede observationer er

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 99.999 \\ 99.988 \\ 100.012 \end{bmatrix}.$$

Opgave 4.1

Variansfaktoren er $\sigma_0^2 = 5.3$, og spredningen på vægtenheden er $\sigma_0 = \sqrt{5.3} = 2.3$.

$$\Sigma_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.401 & 0.112 \\ 0.112 & 1.554 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

$$\Sigma_{\hat{r}} = \begin{bmatrix} 0.128 & 0.363 & 0.204 \\ 0.363 & 1.026 & 0.577 \\ 0.204 & 0.577 & 0.324 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

Opgave 4.2

De normaliserede residualer er $r'_1 = -1.0$, $r'_2 = -1.0$ og $r'_3 = -1.0$. Halve storakse og halve lilleakse i konfidensellipsen er $a = 0.040$ og $b = 0.020$. Retningsvinklen til storaksen er $\theta = 6.103$ gon.

Opgave 4.3

Spredningen i retningen $\alpha = 30$ gon er $\sigma_{30} = 0.036$.

Opgave 6.1

$\mathbf{A}$ er singular, da ingen højder fastholdes i nivellementsnettet. Rangdefekten er 1, da der er tale om et nivellementsnet. $\mathbf{G}$ matricen, der definerer koordinatsystemet, er givet ved

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vægtmatricen er en 6×6 diagonal matrix, hvor diagonalelementerne er givet ved $[\frac{1}{0.009^2} \frac{1}{0.007^2} \frac{1}{0.005^2} \frac{1}{0.008^2} \frac{1}{0.005^2} \frac{1}{0.008^2}]$. Den pseudoinverse normaligningsmatrix bestemmes ved

$$\mathbf{N}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{G} \mathbf{G}^T)^{-1} - \mathbf{G} (\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0.088 & -0.044 & -0.032 & -0.012 \\ -0.044 & 0.117 & -0.038 & -0.034 \\ -0.032 & -0.038 & 0.083 & -0.013 \\ -0.012 & -0.034 & -0.013 & 0.058 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

og $\mathbf{x}^+$ bestemmes ved

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^+ &= \mathbf{N}^+ \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{b} \\ &= \begin{bmatrix} 0.651 \\ -0.546 \\ 1.551 \\ -1.655 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Endelig bestemmes residualerne til

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= \mathbf{A} \mathbf{x}^+ - \mathbf{b} \\ &= \begin{bmatrix} -0.010 \\ -0.006 \\ 0.001 \\ 0.000 \\ 0.003 \\ -0.006 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Opgave 6.2

Residualerne blev bestemt i opgave 6.1. Variansfaktoren for udjævningen bestemmes

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\hat{\mathbf{r}}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{r}}}{m - n + d} \\ &= \frac{2.92}{6 - 4 + 1} \\ &= 0.97.\end{aligned}$$

Teststørrelsen, w , opstilles efter (6.1)

$$\begin{aligned}w &= \frac{u \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \\ &= \frac{3 \times 0.97}{1} \\ &= 2.92.\end{aligned}$$

Testen foretages på 5 % signifikansniveauet. Ved hjælp af tabellen i appendiks B findes de kritiske værdier for testen. For at H_0 kan accepteres, skal følgende betingelse være opfyldt

$$\begin{aligned}\chi_{(u, \alpha/2)}^2 &< w < \chi_{(u, 1-\alpha/2)}^2 \\ \chi_{(3, 0.025)}^2 &< w < \chi_{(3, 0.975)}^2 \\ 0.2 &< w < 9.4.\end{aligned}$$

Nulhypotesen accepteres.

Opgave 6.3

Kofaktormatricen for residualerne opstilles.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\hat{r}} &= \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{N}^+\mathbf{A}^T \\ &= \begin{bmatrix} 0.516 & 0.184 & -0.110 & -0.168 & 0.016 & 0.126 \\ 0.183 & 0.247 & -0.060 & 0.177 & -0.066 & -0.007 \\ -0.110 & -0.060 & 0.081 & 0.009 & -0.050 & 0.119 \\ -0.168 & 0.177 & 0.009 & 0.364 & -0.100 & -0.109 \\ 0.016 & -0.066 & -0.050 & -0.100 & 0.084 & -0.116 \\ 0.126 & -0.007 & 0.119 & -0.109 & -0.116 & 0.405 \end{bmatrix} \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

Da residualerne blev bestemt i opgave 6.1, kan teststørrelserne umiddelbart opstilles efter (6.3)

$$\begin{aligned} |w_1| &= 1.4 \\ |w_2| &= 1.3 \\ |w_3| &= 0.2 \\ |w_4| &= 0.0 \\ |w_5| &= 0.9 \\ |w_6| &= 1.0. \end{aligned}$$

Det ses af tabel 6.4, at når $\alpha = 5\%$ og $\beta = 20\%$, er den kritiske værdi for $|w_i|$ lig 2.8. Da ingen af teststørrelserne overstiger denne værdi, må observationerne for disse værdier af α og β antages at være fri for grove fejl.

Opgave 6.5

Vægtmatricen for udjævningsproblemet er identisk med den, der anvendes i opgave 6.1. Først bestemmes kofaktormatricen for residualerne.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\hat{r}} &= \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T. \\ &= \begin{bmatrix} 0.516 & 0.184 & -0.110 & -0.168 & 0.016 & 0.126 \\ 0.183 & 0.247 & -0.060 & 0.177 & -0.066 & -0.007 \\ -0.110 & -0.060 & 0.081 & 0.009 & -0.050 & 0.119 \\ -0.168 & 0.177 & 0.009 & 0.364 & -0.100 & -0.109 \\ 0.016 & -0.066 & -0.050 & -0.100 & 0.084 & -0.116 \\ 0.126 & -0.007 & 0.119 & -0.109 & -0.116 & 0.405 \end{bmatrix} \times 10^{-4}, \end{aligned}$$

og dernæst bestemmes $\mathbf{R}$ matricen ifølge (6.6)

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_r \mathbf{C}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.64 & 0.38 & -0.44 & -0.26 & 0.06 & 0.20 \\ 0.22 & 0.50 & -0.24 & 0.28 & -0.27 & -0.01 \\ -0.14 & -0.12 & 0.32 & 0.01 & -0.20 & 0.19 \\ -0.21 & 0.36 & 0.04 & 0.57 & -0.40 & -0.17 \\ 0.02 & -0.14 & -0.20 & -0.16 & 0.34 & -0.18 \\ 0.16 & -0.01 & 0.48 & -0.17 & -0.46 & 0.63 \end{bmatrix}.$$

Redundanstillene er diagonalelementerne i $\mathbf{R}$. Den interne pålidelighed bestemmes efter (6.14). Da $\alpha = 5 \%$ og $\beta = 20 \%$ er $\delta_0 = 2.8$, jævnfør tabel 6.4,

$$\begin{aligned} \nabla_0 b_1 &= 0.032 \\ \nabla_0 b_2 &= 0.028 \\ \nabla_0 b_3 &= 0.025 \\ \nabla_0 b_4 &= 0.030 \\ \nabla_0 b_5 &= 0.024 \\ \nabla_0 b_6 &= 0.028. \end{aligned}$$

Den eksterne pålidelighed bestemmes efter (6.16)

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{01} &= 2.11 \\ \bar{\delta}_{02} &= 2.78 \\ \bar{\delta}_{03} &= 4.06 \\ \bar{\delta}_{04} &= 2.44 \\ \bar{\delta}_{05} &= 3.93 \\ \bar{\delta}_{06} &= 2.13. \end{aligned}$$

Litteratur

- V. Ashkenazi og S.A. Crane. Reliability of networks: A practical problem. I *Forty Years of Thought*, side 47–60. Geodetic Computing Centre (LGR), Delft University of Technology, 1982.
- Kai Borre. *Mindste Kvadraters Princip Anvendt i Landmålingen*. EIVA a/s, 1992.
- Kai Borre. *GPS i Landmålingen*. EIVA a/s, 1996.
- W.F. Caspary. Concepts of network and deformation analysis. Rapport, School of Surveying, The University of New South Wales, 1988.
- M.A.R. Cooper. *Control Surveys in Civil Engineering*. William Collins Sons & Co. Ltd., første udgave, 1987.
- W. Förstner. The reliability of block triangulation. I *Proceedings of the 38th. Photogrammetric Week at Stuttgart University, October 5th.-10th. 1981*, side 225–242. Institut für Photogrammetrie Stuttgart, 1982.
- GeoComp. *Program Turbo-Net Reference Manual*, 1991.
- L. Gruendig. Special adjustment tools for surveying networks. I W.F. Teskey og L. Gruendig, redaktører, *Papers for the Precise Engineering and Deformation Surveys Workshop*, side 19–33. The University of Calgary, 1985.
- Karsten Jensen. *Automatiseret detailmåling*. Aalborg Universitet, 1999.
- Karl-Rudolf Koch. *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models*. Springer-Verlag, 1987.
- A. Leick. *GPS Satellite Surveying*. John Wiley & Sons, Inc., første udgave, 1990.
- A. Leick og M.B. Emmons. Quality control with reliability for large GPS networks. *Journal of Surveying Engineering*, 120(1):25–41, 1994.

- A.P. Mackenzie og E.J. Krakiwsky. Adjustment and post analysis. I W.F. Teskey og L. Gruendig, redaktører, *Papers for the Precise Engineering and Deformation Surveys Workshop*, side 64–78. The University of Calgary, 1985.
- E.M. Mikhail og F. Ackermann. *Observations and Least Squares*. Thomas Y. Crowell Company, Inc., 1976.
- E.M. Mikhail og G. Gracie. *Analysis and Adjustment of Survey Measurements*. Van Nostrand Reinhold Company, Inc., 1981.
- The Staff of the Geodetic Computing Centre. The delft approach for the design and computation of geodetic networks. I *Forty Years of Thought*, side 202–275. Geodetic Computing Centre (LGR), Delft University of Technology, 1982.
- Peter Richardus. *Project surveying*. A.A. Balkema, anden udgave, 1984.
- R.R. Steeves og C.S. Fraser. Statistical post-analysis of least squares adjustment results. I E.J. Krakiwsky, redaktør, *Papers For The CISM Adjustment And Analysis Seminars*, side 182–210. The Canadian Institute of Surveying and Mapping, anden udgave, 1987.
- Wang Zhizhuo. *Principles of Photogrammetry With Remote Sensing*. Publishing House of Surveying and Mapping, Beijing, første udgave, 1990.