Lineær algebra
2. kursusgang

Find linie $y = ax + b$ der bedst muligt tilnærmer punkterne

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n).$$

Mindste kvadraters linien er linien hvor a og b er valgt så

$$(ax_1 + b - y_1)^2 + \ldots + (ax_n + b - y_n)^2$$

er mindst mulig.

a og b findes som mindste kvadraters løsning til ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Altså en vektor $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$ så afstand mellem vektoren på venstre side og vektoren på højre side er minimal.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$$ kaldes designmatrix.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$ kaldes observationsvektor.

Parametervektoren $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$ bestemmes som løsning til normalligningen

$$A^T A \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = A^T \mathbf{y}.$$

Vi fandt a og b så kurven $y = af(x) + bg(x)$ ligger tættest på punkterne, hvor $f(x) = x$ og $g(x) = 1$.

Metoden kan bruges for andre funktioner $f(x)$ og $g(x)$.

F.eks. $f(x) = x^2$ og $g(x) = x$.

Eksempel: Punkter $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(4, 3), (5, 7)$.

Find parabel med ligning $xb + x^2 a = y$ der går gennem punkterne:

$$\begin{aligned} 1b + 1^2 a &= 0 \\ 2b + 2^2 a &= 1 \\ 4b + 4^2 a &= 3 \\ 5b + 5^2 a &= 7 \end{aligned}$$

Altså $A\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \mathbf{y}$, hvor

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 4 & 16 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}$ er designmatrix og $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ er observationsvekto

En mindste kvadraters løsning til $A\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \mathbf{y}$ minimerer $\sum_{i=1}^{n}(x_i b + x_i^2 b - y_i)^2$.

Normalligningen $A^T A \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = A^T\mathbf{y}$ er så

$$\begin{bmatrix} 46 & 198 \\ 198 & 898 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 \\ 227 \end{bmatrix}.$$

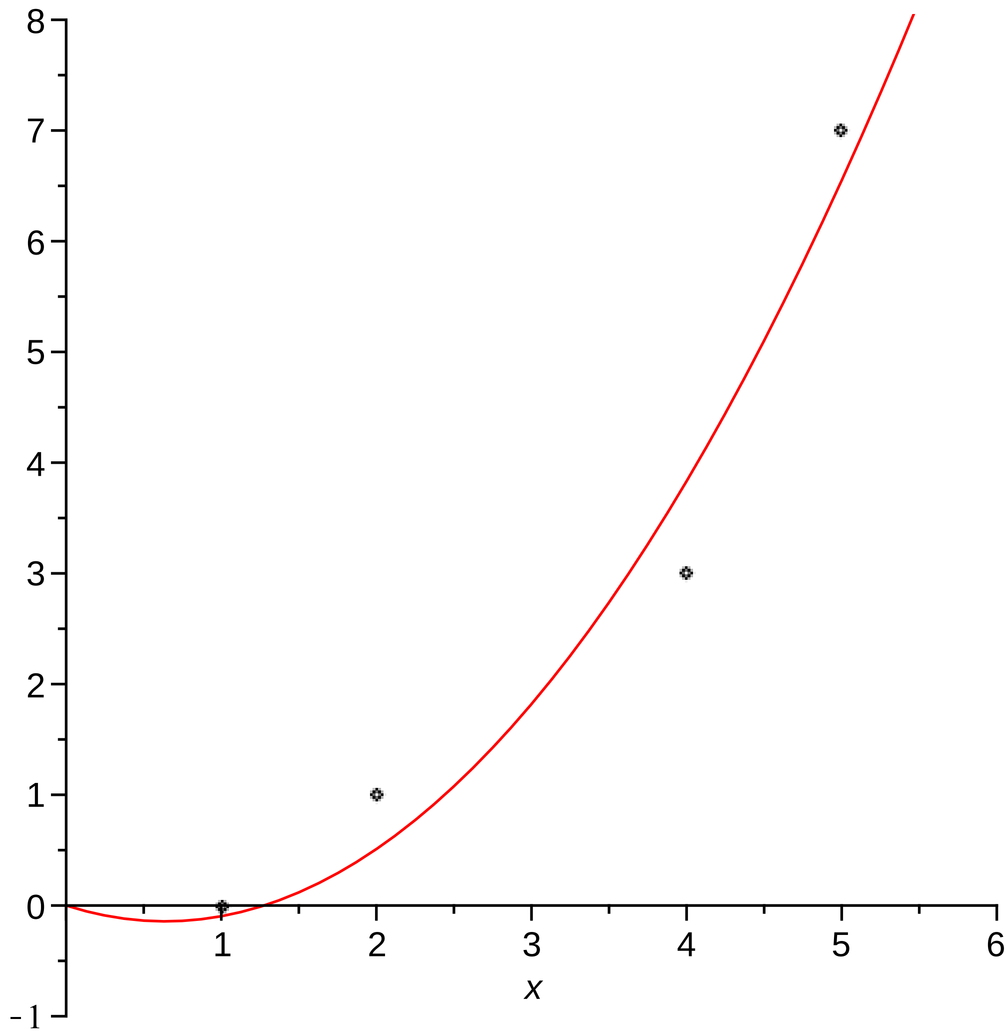
Den har løsning

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.45 \\ 0.35 \end{bmatrix}.$$

Der er ingen parabel der præcis går gennem punkterne, men parabelen med ligning

$$y = 0.35x^2 - 0.45x$$

er en "god" tilnærmelse.



8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
1
2
3
4
5
6
x

Afsnit 6.1

Lad $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ være to vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Så defineres prikproduktet (det indre produkt eller skalarproduktet) som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

A en $m \times n$ matrix.
B en $n \times s$ matrix.

Tallene i produktet AB kan udregnes som prikprodukter:
Plads (i, j) i $AB = (A$'s række $i) \cdot (B$'s søjle $j)$.

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & 1 & * & * & * & * \\ * & 2 & * & * & * & * \\ * & 3 & * & * & * & * \\ * & 4 & * & * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & 70 & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$70 = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4.$

Regneregler:

- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

- $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$

- $(c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$ for et tal c.

- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} > 0$ med mindre $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. $\quad \mathbf{0}\cdot\mathbf{0} = 0$.

Længden af en vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ defineres til

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

$$||\mathbf{v}||^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$$

$$||c\mathbf{v}|| = \sqrt{(c\mathbf{v})\cdot(c\mathbf{v})} = \sqrt{c^2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})} = |c|\sqrt{||\mathbf{v}||^2} = |c| \cdot ||\mathbf{v}||.$$

Normalisering af vektor $\mathbf{v}$:
Vektoren $\frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v}$ har længde 1 og peger i samme retning som $\mathbf{v}$.

Afstanden mellem to vektorer $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^n$ defineres som

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ||\mathbf{u} - \mathbf{v}|| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}.$$

To vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ siges at være ortogonale (vinkelrette) hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

$\mathbf{0}$ er ortogonal på enhver vektor $\mathbf{v}$.

Pythagoras:
$\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er ortogonale hvis kun hvis $||\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2$.

$$||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}+\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}+2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||^2+||\mathbf{v}||^2+2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Underrum (afsnit 2.8)
H: en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$.
H er et underrum af $\mathbb{R}^n$ hvis

- $\mathbf{0} \in H$

- hvis $\mathbf{u} \in H$ og $\mathbf{v} \in H$ så $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$

- hvis $\mathbf{u} \in H$ og $c \in \mathbb{R}$ så $c\mathbf{u} \in H$

Eksempler på underrum:

1. Hvis $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \in \mathbb{R}^n$ så er

$$\text{span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\} = \{c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_m\mathbf{u}_m \mid c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}\}$$

(mængden af alle linearkombination af $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$).
span$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ er et underrum af $\mathbb{R}^n$.

2. Hvis $A = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_m]$ er en $n \times m$ matrix så er

$$\text{Col } A = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$$

(søjlerummet af A)
et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Col A er mængden af vektorer på formen $A\mathbf{x}$ hvor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.

3. Hvis A er en $n \times m$ matrix så er

$$\text{Nul } A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

(nulrummet for A) et underrum af $\mathbb{R}^m$.

4. Hvis $A = \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{a}_1 & \dots \\ \dots & \mathbf{a}_2 & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & \mathbf{a}_m & \dots \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_m]^T$ er en $m \times n$ matrix så er
Row $A = \text{Col } A^T$ et underrum af $\mathbb{R}^n$.
(Row A er mængden af alle linear kombinationer af A's rækkevektorer.)
Det kaldes rækkerummet for A.

Lad W være et underrum af $\mathbb{R}^n$,
og lad $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$ være vektorer i W.

$\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ er en basis for W hvis

- span$\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\} = W$ og

- $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$ er lineært uafhængige
  (Det betyder at ligningen

$$x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \ldots + x_p\mathbf{b}_p = \mathbf{0}$$

  kun har løsningen $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$.)

Dimensionen, dim W, er antallet af vektorer i en basis.

Eksempler på underrum:

5. Hvis W er et underrum af $\mathbb{R}^n$ så lad L være mængden af vektorer i $\mathbb{R}^n$ der er ortogonale på enhver vektor i W.

Så er L et underrum af $\mathbb{R}^n$.
L kaldes det ortogonale komplement af W, skrives $L = W^{\perp}$.

For et underrum W af $\mathbb{R}^n$:

$$(W^{\perp})^{\perp} = W.$$

$$\dim W + \dim W^{\perp} = n$$

De fire fundamentale underrum for matricen A er
Col A, Row A, Nul A og Nul A^T.

Sammenhæng mellem de fire fundamentale underrum:

$$(\text{Row } A)^\perp = \text{Nul } A$$

$$(\text{Col } A)^\perp = (\text{Row } A^T)^\perp = \text{Nul } A^T$$

Afsnit 6.3

W: et underrum af $\mathbb{R}^n$
$\mathbf{y}$: en vektor i $\mathbb{R}^n$

Så findes der entydige vektorer $\hat{\mathbf{y}}$ og $\mathbf{z}$ så

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$$

$$\hat{\mathbf{y}} \in W$$

$$\mathbf{z} \in W^{\perp}$$

Hvis $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ er en ortogonal basis for W
(altså: $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ er en basis for W
og $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ for alle $i \neq j$)
så er

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 + \ldots + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p} \mathbf{u}_p$$

og

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}.$$

$\hat{\mathbf{y}}$ kaldes den ortogonale projektion af $\mathbf{y}$ på W.

$\hat{\mathbf{y}}$ er den vektor i i W der er nærmest $\mathbf{y}$:
For alle $\mathbf{v} \in W$, $\mathbf{v} \neq \hat{\mathbf{y}}$ er $\text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) > \text{dist}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}})$.