

Lineær algebra - 3

En lineær ligning er en ligning på formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

hvor $x_1, x_2, \dots, x_n$ er variable (ubekendte) og $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ faste (kendte) tal.

F.eks.

$a_1x_1 + a_2x_2 = b$ eller $a_1x + a_2y = b$ som er ligningen for en linie i planen.

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ eller $a_1x + a_2y + a_3z = b$ som er ligningen for en plan i rummet.

Et lineært ligningssystem består af et antal (f.eks. m) lineære ligninger, der alle har de samme variable:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

Ligningssystemet kan også skrives som

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Eller som $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A kaldes koefficientmatricen for ligningssystemet.

Den udvidede koefficientmatrix (totalmatrix) er

$$[A\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Vi siger at et ligningssystem er *konsistent* hvis det har mindst én løsning. Ellers er det *inkonsistent*.

Eksempel: To lineære ligninger med to ubekendte x og y : De to ligninger er ligning for to linier, hhv. ℓ_1 og ℓ_2 .

Tre muligheder:

- De to ligninger skærer hinanden i ét punkt, (a, b) . Så er $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ en løsning. Dette er den eneste løsning.
- Linierne ℓ_1 og ℓ_2 er parallelle og skærer ikke hinanden. Ligningssystemet har ingen løsning. Det er inkonsistent.
- $\ell_1 = \ell_2$. Løsningsmængden er uendelig.

Elementære rækkeoperationer:

1. ombyt række i og række j : $r_i \leftrightarrow r_j$

2. skalering af række i med factor $c \neq 0$: $cr_i \rightarrow r_i$

3. adder c gange række i til række j : $r_j + cr_i \rightarrow r_j$

Hvis matricen B fremkommer fra matricen A ved én af disse rækkeoperationer så kan A fås fra B ved anvendelse af henholdsvis

$$r_i \leftrightarrow r_j, \quad \frac{1}{c}r_i \rightarrow r_i, \quad r_j - cr_i \rightarrow r_j.$$

En matrix siges at være på trappeform (echelon form) hvis

1. rækker der kun har 0'er står nederst i matricen,
2. første indgang forskellig fra 0 i en række (den ledende indgang i rækken) står i en søjle til højre for første indgang forskellig fra 0 i rækken ovenover.

Hvis indgang (i, j) i en matrix på trappeform er en ledende indgang i en ikke-0 række, så siges denne indgang at være en *pivot*.

Matricen A siges at være på reduceret trappeform (echelon form) hvis den er på trappeform og opfylder

4. hvis a_{ij} er den ledende indgang i række i så er $a_{\ell j} = 0$ for alle $\ell \neq i$

5. den ledende indgang i hver række er 1.

Enhver matrix kan ved et antal elementære rækkeoperationer omskrives til en *entydig* matrix på reduceret trappeform.

Gausselimination: omskrivning af matrix til trappeform.

Betragt søjlerne én ad gangen fra venstre mod højre.

Hvis første søjle er en 0-søjle, så se bort fra den og fortsæt med næste søjle.

Hvis første søjle har indgange $\neq 0$, så foretag eventuelt rækkeombytning sådan at øverste indgang er $\neq 0$. Denne indgang er en pivotindgang. Adder et multiplum af første række til hver af de andre rækker, sådan alle tal under pivotindgangen er 0.

Se bort fra første søjle og første række og fortsæt med næste søjle indtil alle søjler er behandlet.

Omskrivning af matrix på trappeform til reduceret trappeform:

Betragt pivotsøjlerne fra højre mod venstre.

Hvis $[Ab]$ er den udvidede koefficientmatrix for et ligningssystem og $[Rc]$ er matricen på reduceret trappeform, der fås ved at udføre rækkeoperationer på $[Ab]$, så har ligningssystemet med udvidet koefficient matrix $[Rc]$ de samme løsninger som det oprindelige ligningssystem.

Løsning af ligningssystem med udvidet koefficientmatrix på reduceret trappeform:

Hvis det er pivot i sidste søjle så er ligningssystemet inkonsistent.

Ellers er ligningssystemet konsistent og

hvis søjle nr. j ikke har pivot så er x_j er fri variabel og

hvis søjle nr. j har pivot så kan x_j udtrykkes ved hjælp af de frie variable (og tal i matricen).

Definition: Rangen af en matrix A er antallet af pivotindgange i matricen, skrives $\text{rank } A$.

Definition: Nulliteten af en matrix A er antallet af søjler uden pivot; skrives $\text{nullity } A$.

Hvis A har n søjler så er $\text{rank } A + \text{nullity } A = n$.

Hvis A er koefficient matrix for et *konsistent* ligningssystem så er antallet af frie variable i løsningen: $\text{nullity } A$.