Lineær algebra - 6

Hvis A er en $m \times n$ matrix og $B = [\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_p]$ er en $n \times p$ matrix så defineres **matrixmultiplikation** af A og B ved

$$AB = [A\mathbf{b}_1 \ldots A\mathbf{b}_p].$$

Bemærk at hvis (antal søjler i A) $\neq$ (antal rækker i B) så er AB ikke defineret.
Anden metode til beregning af AB:

$$\text{indgang } (i,j) \text{ i } AB = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

A en $m \times n$ matrix.
B en $r \times p$ matrix.

Produktet AB kan udregnes hvis $n = r$
og resultatet er så en $m \times p$ matrix.

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & 1 & * & * & * & * \\ * & 2 & * & * & * & * \\ * & 3 & * & * & * & * \\ * & 4 & * & * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & 70 & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$70 = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4.$

Udvalgte regneregler (når matricernes størrelse gør at udtrykkene er defineret):

$$A(BC) = (AB)C$$
$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(A + B)C = AC + BC$$
$$I_m A = A I_n = A$$
$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Matrixmultiplikation er ikke kommutativ. Altså: det er almindeligt at

$$AB \neq BA$$

når begge produkter er defineret.

Hvis $B = [\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_p]$ er en $n \times p$ matrix og $C = [\mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_q]$ er en $n \times q$ matrix så indføres en $n \times (p+q)$ matrix

$$[B\ C] = [\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_p\ \mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_q].$$

Hvis A er en $m \times n$ matrix så er

$$A[B\ C] = [A\mathbf{b}_1 \ldots A\mathbf{b}_p\ A\mathbf{c}_1 \ldots A\mathbf{c}_q] = [AB\ AC].$$

En $n \times n$ matrix A siges at være **invertibel** (inverterbar) hvis der findes en $n \times n$ matrix B så

$$AB = BA = I_n.$$

B siges da at være den invers til A, skrives: $B = A^{-1}$.

Hvis A er en invertibel $n \times n$ matrix og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ så har ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en entydig løsning:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Regneregler for invers matrix. Lad A og B være invertible $n \times n$ matricer. Så er

- A^{-1} invertibel og $(A^{-1})^{-1} = A$,

- AB invertibel og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

- A^T invertibel og $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Elementær matricer.

Lad A være en matrix med m rækker

Hvis E fremkommer fra I_m ved anvendelse af en elementær rækkeoperation
så fremkommer EA fra A ved anvendelse af den samme elementære rækkeoperation.

E siges da at være en elementær matrix.