Lineær algebra - 7

En $n \times n$ matrix E er en elementær matrix hvis den fremkommer fra I_n ved anvendelse af en enkelt elementær rækkeoperation.

Enhver elementær matrix er invertibel.

- Hvis E fremkommer fra I_n ved rækkeombytning så er $E^{-1} = E$.
- Hvis E fremkommer fra I_n ved at skalere række i med en faktor $c \neq 0$ så fremkommer E^{-1} fra I_n ved at skalere række i med en faktor $\frac{1}{c}$.
- Hvis E fremkommer fra I_n ved at addere c gange række i til række j så fremkommer E^{-1} fra I_n ved at addere $-c$ gange række i til række j.

Enhver matrix A kan omskrives til en matrix R på reduceret trappeform ved hjælp af elementære rækkeoperationer, der svarer til multiplikation med elementære matricer, hhv. $E_1, E_2, \dots, E_k$.

Så er

$$E_k \dots E_2 E_1 A = R.$$

Der findes altså en invertibel matrix P ($P = E_k \dots E_2 E_1$) så

$$PA = R$$

$P^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1}$.

Hvis søjle nr. j ($j > 1$) i en matrix A ikke har pivotposition så er $\mathbf{a}_j$ en linear kombition af søjlerne $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}$.

Mængden af pivotsøjler i A er lineært uafhængig.

(Theorem 2.6)
Lad A være en $n \times n$ matrix. Så er følgende udsagn ækvivalente

- A er invertibel.
- A har pivot i alle søjler.
- A har rang n.
- $\mathrm{rref}(A) = I_n$, hvor $\mathrm{rref}(A)$ er den reducerede trappeform af A.

(Theorem 2.6)
Hvis A og B er $n \times n$ matricer, der opfylder

$$AB = I_n$$

så er

$$BA = I_n$$

og dermed er A og B invertible, $A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$.

Algoritme:
Lad A være en $n \times n$ matrix. Betragt følgende $n \times 2n$ matrix

$$[A \ I_n].$$

Omskriv denne matrix til reduceret trappeform på følgende form

$$[R \ B].$$

- Hvis $R = I_n$ så er A invertibel og $A^{-1} = B$.

- Hvis $R \neq I_n$ så er A ikke invertibel.
  (Allerede når man ser at der ikke kan være pivot i de første n søjler, kan man konkludere at A ikke er invertibel.)

Hvis A er en invertibel $n \times n$ matrix så kan løsningen til et ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ findes som

$$\mathbf{c} = A^{-1}\mathbf{b},$$

men hvis den inverse ikke er kendt er det nemmere finde løsningen med den sædvanlige metode:

$$[A\ \mathbf{b}] \to \ldots \to [I_n\ \mathbf{c}].$$

Hvis $B = [\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_p]$ er en $n \times p$ matrix så kan ligningssystemerne

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, \ldots, A\mathbf{x}_p = \mathbf{b}_p$$

skrives som $AX = B$ hvor $X = [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_p]$ er en $n \times p$ matrix. Løsningen $X = A^{-1}B$ kan beregnes på følgende måde

$$[A\ B] \to \ldots \to [I_n\ A^{-1}B].$$