

# Lineær algebra - 11

$A$ : en  $n \times n$  matrix.

På plads  $(i, j)$  står der  $a_{ij}$ .

$A_{ij}$ : en  $(n-1) \times (n-1)$  matrix, der fås fra  $A$  ved at fjerne række  $i$  og søjle  $j$ .

$(i, j)$ -cofaktor:  $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ .

## Sætning 3.1+

Udvikling efter række  $i$ :

$$\det A = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \dots + a_{in}c_{in}.$$

Udvikling efter søjle  $j$ :

$$\det A = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \dots + a_{nj}c_{nj}.$$

Determinanten af en **øvre triangulær** matrix er produktet af diagonalindgangene:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}.$$

og en **nedre triangulær** matrix:

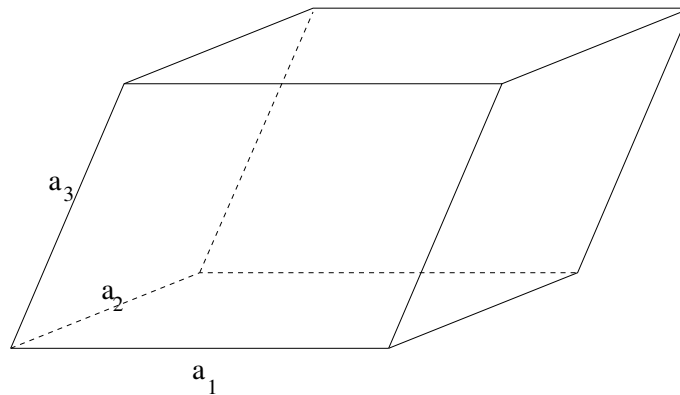
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}.$$

Lad  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ .

$|\det[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2]|$  er da arealet af et parallelogram udspændt af  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ .

Lad  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ .

$|\det[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]|$  er da rumfang af et parallelepipedum udspændt af  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ .



## Elementære rækkeoperationer på determinanter.

Matricen  $B$  fås fra  $A$  ved at udføre en af disse rækkeoperationer:

1. gang en række med et tal  $k \neq 0$

$$\det(B) = k \det(A) \text{ altså } \det(A) = \frac{1}{k} \det(B).$$

2. række  $i$  erstattes af (række  $i$ ) +  $k \cdot$  (række  $j$ ),  $i \neq j$

$$\text{determinanten er uændret: } \det(B) = \det(A).$$

3. ombyt to rækker.

$$\text{determinanten skifter fortegn: } \det(B) = -\det(A).$$

**Egenskaber for determinanter.**  $A$  og  $B$  er  $n \times n$  matricer.

- $A$  har en invers hvis og kun hvis  $\det(A) \neq 0$ .
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ .
- $\det(A^T) = \det(A)$ .

Sidstnævnte egenskab betyder at determinanter kan beregnes ved udvikling efter en søjle.

**Cramers regel** til løsning af lineært ligningssystem.

Ligningssystemet

$$ax + by = r$$

$$cx + dy = s$$

har løsning

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} r & b \\ s & d \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}, \quad y = \frac{\det \begin{bmatrix} a & r \\ c & s \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}},$$

hvis  $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0$ .