Lineær algebra - 11

A: en $n \times n$ matrix.
På plads (i, j) står der a_{ij}.

A_{ij}: en $(n-1) \times (n-1)$ matrix, der fås fra A ved at fjerne række i og søjle j.

(i, j)-cofaktor: $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Sætning 3.1+
Udvikling efter række i:

$$\det A = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \ldots + a_{in}c_{in}.$$

Udvikling efter søjle j:

$$\det A = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \ldots + a_{nj}c_{nj}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Fortegn i cofaktor $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

Udvikling efter række 2:

$$\det A = -a_{21} \det A_{21} + a_{22} \det A_{22} - a_{23} \det A_{23}$$

$$= -4 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + 0 - (-4) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= -4 \cdot (3 \cdot 5 - 2 \cdot (-1)) + 4 \cdot (1 \cdot (-1) - 3 \cdot (-3)) =$$

$$-4 \cdot 17 + 4 \cdot 8 = -36$$

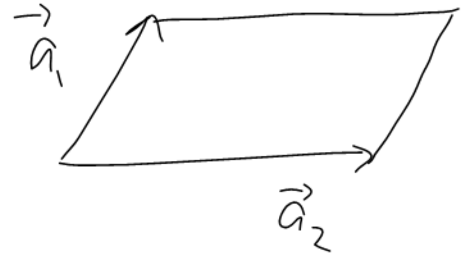
Determinanten af en **øvre triangulær** matrix er produktet af diagonalindgangene:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

og en **nedre triangulær** matrix:

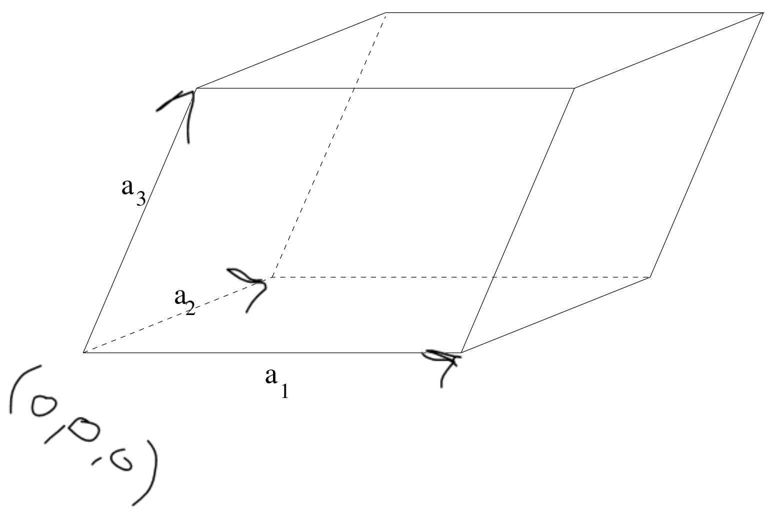
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

$\det[\vec{a}_2 \;\; \vec{a}_1] = -\det[\vec{a}_1 \;\; \vec{a}_2]$



Lad $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$.
$|\det[\mathbf{a}_1 \;\; \mathbf{a}_2]|$ er da arealet af et parallelogram udspændt af $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$.

Lad $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^3$.
$|\det[\mathbf{a}_1 \;\; \mathbf{a}_2 \;\; \mathbf{a}_3]|$ er da rumfang af et parallelepipedum udspændt af $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.



Elementære rækkeoperationer på determinanter.

Matricen B fås fra A ved at udføre en af disse rækkeoperationer:

1. gang en række med et tal $k \neq 0$
   $\det(B) = k \det(A)$ altså $\det(A) = \frac{1}{k} \det(B)$.

2. række i erstattes af (række i) $+ k \cdot$ (række j), $i \neq j$
   determinanten er uændret: $\det(B) = \det(A)$.

3. ombyt to rækker.
   determinanten skifter fortegn: $\det(B) = -\det(A)$.

$$\overset{A}{\det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}} \overset{\frac{1}{4}R_2 \to R_2}{=\!=\!=} \overset{B}{4 \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$

$$= -4 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$R_2 - R_1 \to R_2$

$R_3 + 3R_1 \to R_3$

$$= -4 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{3}R_2 \to R_2}{=} -4 \cdot 3 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$R_3 + R_2 \to R_3$

$$= -12 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= -12 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = -36$$

Egenskaber for determinanter. A og B er $n \times n$ matricer.

- A har en invers hvis og kun hvis $\det(A) \neq 0$.
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.
- $\det(A^T) = \det(A)$.

Sidstnævnte egenskab betyder at determinanter kan beregnes ved udvikling efter en søjle.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Udvikling efter søjle 2:

$$\det A = -a_{12} \det A_{12} + a_{22} \det A_{22} - a_{32} \det A_{32}$$

$$-3 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + 0 - (-1) \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} =$$

$$-3 \cdot (4 \cdot 5 - (-4)(-3)) + 1 \cdot (1 \cdot (-4) - 2 \cdot 4) =$$

$$-3 \cdot 8 + (-12) = -36$$

Cramers regel til løsning af lineært ligningssystem.

Ligningssystemet

$$ax + by = r$$
$$cx + dy = s$$

har løsning

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} r & b \\ s & d \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}, \quad y = \frac{\det \begin{bmatrix} a & r \\ c & s \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}},$$

hvis $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0$.