

Lineær algebra - 12

Definition af underrum.

En mængde V af vektorer i \mathbb{R}^n siges at være et underrum af \mathbb{R}^n hvis følgende tre betingelse er opfyldt:

1. $\mathbf{0} \in V$,
2. hvis $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ så er $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$,
3. hvis $\mathbf{u} \in V$ og $c \in \mathbb{R}$ så er $c\mathbf{u} \in V$.

Et underrum af \mathbb{R}^3 er en af følgende typer:

- $\{0\}$
- En linie gennem 0 .
- En plan gennem 0 .
- Hele \mathbb{R}^3 .

To vigtige typer af underrum

1.

Hvis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ er vektorer i \mathbb{R}^n så er $\text{Span} \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ et underrum af \mathbb{R}^n , og det kaldes underrummet udspændt af $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$.

Hvis $A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k]$ er en $n \times k$ matrix så er $\text{Span} \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ et underrum af \mathbb{R}^n , der kaldes søjlerummet af A og betegnes $\text{Col } A$.

2.

For en $m \times n$ matrix A defineres nulrummet som

$$\text{Null } A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Nulrummet af en $m \times n$ matrix er et underrum af \mathbb{R}^n .

Hvis $\text{Null } A \neq \{\mathbf{0}\}$ så giver metoden fra afsnit 1.3 løsningen udtrykt som en linearkombination af et antal vektorer, med én vektor for hver fri variabel. Disse vektorer er desuden lineært uafhængige, og udgør dermed en basis for nulrummet.

Definition af basis.

Hvis V er et underrum af \mathbb{R}^n og $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ er en mængde af vektorer i V så siger vi at $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ er en basis for V hvis

- $\text{Span } \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} = V$, og
- $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ er lineært uafhængig.

$\{e_1, \dots, e_n\}$ er en basis for \mathbb{R}^n . Den kaldes standardbasen for \mathbb{R}^n .

Andre baser for \mathbb{R}^n :

Lad v_1, \dots, v_k være vektorer i \mathbb{R}^n , og lad $A = [v_1 \dots v_k]$.

Så er $\mathcal{S} = \{v_1, \dots, v_k\}$ lineært uafhængig hvis og kun hvis A har pivot i alle søjler,

og $\text{Span } \mathcal{S} = \mathbb{R}^n$ hvis og kun hvis A har pivot i alle rækker.

\mathcal{S} er altså basis for \mathbb{R}^n hvis og kun hvis $\text{rref}(A) = I_n$.

Lad $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ være vektorer i \mathbb{R}^n .

- Hvis $\text{Span} \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} = \mathbb{R}^n$ så er $k \geq n$.
- Hvis $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ er lineært uafhængig så er $k \leq n$.
- Hvis $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ er basis for \mathbb{R}^n så er $k = n$.

Hvis $A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k]$ er en $n \times k$ matrix så udgør de søjler i A der har pivot, en basis for $\text{Col } A$.