Lineær algebra - 12

Definition af underrum.

En mængde V af vektorer i $\mathbb{R}^n$ siges at være et underrum af $\mathbb{R}^n$ hvis følgende tre betingelse er opfyldt:

1. $\mathbf{0} \in V$,

2. hvis $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ så er $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$,

3. hvis $\mathbf{u} \in V$ og $c \in \mathbb{R}$ så er $c\mathbf{u} \in V$.

$\underset{\sim}{u} \in V \Rightarrow 0 \cdot \vec{u} = \vec{0} \in V$

Et underrum af $\mathbb{R}^3$ er en af følgende typer:

- $\{\mathbf{0}\}$
- En linie gennem $\mathbf{0}$.
- En plan gennem $\mathbf{0}$.
- Hele $\mathbb{R}^3$.

Dansk		Engelsk
mængde	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	set
delmængde	$\{1, 2, 4\}$	subset
matrix	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$	
delmatrix undermatrix	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$	submatrix
rum	$\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5 \ldots$	space

underrum plan i $\mathbb{R}^3$ Subspace

To vigtige typer af underrum

1.

Hvis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ er vektorer i $\mathbb{R}^n$ så er Span $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ et underrum af $\mathbb{R}^n$, og det kaldes underrummet udspændt af $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.

Hvis $A = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_k]$ er en $n \times k$ matrix så er Span $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ et underrum af $\mathbb{R}^n$, der kaldes søjlerummet af A og betegnes Col A.

Eks

$$\vec{v}, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$$

Ligger $\vec{v}$ i $\text{span}\{\vec{a}_1 \dots \vec{a}_k\}$

Er $\vec{v} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_k\vec{a}_k$ konsistent?

Ligger $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ i $\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Svar: Ja, ikke pivot i sidste søjle

2.

For en $m \times n$ matrix A defineres nulrummet som

$$\text{Null } A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Nulrummet af en $m \times n$ matrix er et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Hvis Null $A \neq \{\mathbf{0}\}$ så giver metoden fra afsnit 1.3 løsningen udtrykt som en linearkombination af et antal vektorer, med én vektor for hver fri variabel. Disse vektorer er desuden lineært uafhængige, og udgør dermed en basis for nulrummet.

Definition af basis.

Hvis V er et underrum af $\mathbb{R}^n$ og $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er en mængde af vektorer i V så siger vi at $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er en basis for V hvis

- Span $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} = V$, og
- $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er lineært uafhængig.

EKS, Nullrum

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_5 = 0$$

$$x_3 - x_5 = 0$$

x_2, x_5 frie

$$x_4 - x_5 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 - 4x_5 \\ x_2 \\ x_5 \\ x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Null } A = \text{Span} \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}_{\text{Basis for Null } A}$$

<u>Søjlerum</u> af A

Basis for Col A: (søjler i A med pivot)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$. Den kaldes standardbasen for $\mathbb{R}^n$.

Andre baser for $\mathbb{R}^n$:

Lad $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$, og lad $A = [\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_k]$.
Så er $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ lineært uafhængig hvis og kun hvis A har pivot i alle søjler,
og Span $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$ hvis og kun hvis A har pivot i alle rækker.

$\mathcal{S}$ er altså basis for $\mathbb{R}^n$ hvis og kun hvis rref$(A) = I_n$.

og $k = n$

Lad $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$.

- Hvis Span $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \mathbb{R}^n$ så er $k \geq n$.
- Hvis $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er lineært uafhængig så er $k \leq n$.
- Hvis $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er basis for $\mathbb{R}^n$ så er $k = n$.

Hvis $A = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_k]$ er en $n \times k$ matrix så udgør de søjler i A der har pivot, en basis for Col A.