Lineær algebra - 15

Matrix repræsentation af lineær operator.

En lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ kaldes en lineær operator på $\mathbb{R}^n$.

Hvis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$ så defineres matrix repræsentationen af T m.h.t. $\mathcal{B}$ som

$$[T]_{\mathcal{B}} = [[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}}\ [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}}\ \ldots\ [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}}].$$

$[T]_{\mathcal{B}}$ er den entydige $n \times n$ matrix, der opfylder

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}},$$

for enhver vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Matrix repræsentationen af T m.h.t. standardbasen $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ er standardmatricen for T:

$$[T]_{\mathcal{E}} = [T(\mathbf{e}_1) \; T(\mathbf{e}_2) \; \ldots \; T(\mathbf{e}_n)].$$

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ være en basis for $\mathbb{R}^n$ og
lad $B = [\mathbf{b}_1 \; \mathbf{b}_2 \; \ldots \; \mathbf{b}_n]$.

Lad A være standardmatricen for en lineær operator T på $\mathbb{R}^n$.
Så bestemmes matrix repræsentationen af T m.h.t. $\mathcal{B}$ ved

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1}AB.$$

Hvis A og C er $n \times n$ matricer, der opfylder at der findes en invertibel $n \times n$ matrix P så $C = P^{-1}AP$ så siger vi at A og C er **similære**.

Bemærk at $C = P^{-1}AP$
hvis og kun hvis
$A = PCP^{-1}$ (altså $A = Q^{-1}CQ$, hvor $Q = P^{-1}$).

Desuden: Hvis A og C er similære og C og B er similære, så er A og B similære.

At A og C er similære betyder at de er forskellige matrix repræsentationer af samme lineære operator.

Egenvektorer og egenværdier.

Lad A være $n \times n$ matrix.
En vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ siges at være en egenvektor for A hvis der findes et tal λ (lambda) så

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

λ siges at være en egenværdi for A hørende til egenvektoren $\mathbf{v}$.

Lad T være en lineær operator på $\mathbb{R}^n$.
En vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ siges at være en egenvektor for T hvis der findes et tal λ så

$$T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}.$$

λ siges at være en egenværdi for T hørende til egenvektoren $\mathbf{v}$.

En egenvektor for en lineær operator er en egenvektor for dens standardmatrix.

Lad λ være en egenvektor for en $n \times n$ matrix A.
Egenrummet for A hørende til egenværdien λ er mængden af vektorer $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, der opfylder

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Egenrummet for A hørende til egenværdien λ er altså nulrummet af $A - \lambda I_n$.

Egenrummet hørende til egenværdien λ består af alle egenvektorer hørende til egenværdien λ og $\mathbf{0}$.

Egenrummet er et underrum af $\mathbb{R}^n$.