Lineær algebra - 15

Matrix repræsentation af lineær operator.

En lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ kaldes en lineær operator på $\mathbb{R}^n$.

Hvis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$ så defineres matrix repræsentationen af T m.h.t. $\mathcal{B}$ som

$$[T]_{\mathcal{B}} = [[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}}\ [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}}\ \ldots\ [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}}].$$

$[T]_{\mathcal{B}}$ er den entydige $n \times n$ matrix, der opfylder

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}},$$

for enhver vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

$$T(\vec{v}) = A\vec{v}$$

Matrix repræsentationen af T m.h.t. standardbasen $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ er standardmatricen for T:

$$[T]_{\mathcal{E}} = [T(\mathbf{e}_1)\ T(\mathbf{e}_2)\ \ \ldots\ \ T(\mathbf{e}_n)].$$

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ være en basis for $\mathbb{R}^n$ og
lad $B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \ \ldots\ \ \mathbf{b}_n]$.

Lad A være standardmatricen for en lineær operator T på $\mathbb{R}^n$.
Så bestemmes matrix repræsentationen af T m.h.t. $\mathcal{B}$ ved

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1}AB.$$

Eks matrix representation

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1+2x_2 \\ 3x_1+x_2 \end{bmatrix}$$ en lineær operator på $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$ en basis for $\mathbb{R}^2$

Find $[T]_{\mathcal{B}}$

Standard matrix for T : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[B \mid I_2] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Så er

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1} \underbrace{AB} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

S : en lineær operator på $\mathbb{R}^2$

med $[S]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Standardmatrix for S : $A = B[S]_{\mathcal{B}} B^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -13 & 11 \end{bmatrix}$

Hvis A og C er $n \times n$ matricer, der opfylder at der findes en invertibel $n \times n$ matrix P så $C = P^{-1}AP$ så siger vi at A og C er **similære**.

Bemærk at $C = P^{-1}AP$
hvis og kun hvis
$A = PCP^{-1}$ (altså $A = Q^{-1}CQ$, hvor $Q = P^{-1}$).

Desuden: Hvis A og C er similære og C og B er similære, så er A og B similære.

At A og C er similære betyder at de er forskellige matrix repræsentationer af samme lineære operator.

Egenvektorer og egenværdier.

Lad A være $n \times n$ matrix.
En vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ siges at være en egenvektor for A hvis der findes et tal λ (lambda) så

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

λ siges at være en egenværdi for A hørende til egenvektoren $\mathbf{v}$.

Lad T være en lineær operator på $\mathbb{R}^n$.
En vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ siges at være en egenvektor for T hvis der findes et tal λ så

$$T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}.$$

λ siges at være en egenværdi for T hørende til egenvektoren $\mathbf{v}$.

En egenvektor for en lineær operator er en egenvektor for dens standardmatrix.

Værdi

Lad λ være en egenvektor for en $n \times n$ matrix A.
Egenrummet for A hørende til egenværdien λ er mængden af vektorer $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, der opfylder

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \iff A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0} \iff (A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$$

Egenrummet for A hørende til egenværdien λ er altså nulrummet af $A - \lambda I_n$.

Egenrummet hørende til egenværdien λ består af alle egenvektorer hørende til egenværdien λ og $\mathbf{0}$.

Egenrummet er et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Eks på egenvektor

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hvis $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ så er $A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \vec{v}$

$\vec{v}$ er egenvektor med egenverdi 1.

Er -2 en egenverdi?

$A\vec{x} = -2\vec{x} \iff A\vec{x} + 2\vec{x} = \vec{0} \iff (A + 2I_3)\vec{x} = \vec{0}$

$$A + 2I_3 = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 fri $\quad x_1 - x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Basis for egenrummet hørende til egenværdi -2

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$ er basis for $\mathbb{R}^3$

den består egenvektorer med egenvärden
h.h.v. 1, −2, 3

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \text{linear operator}$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = B^{-1}AB \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$