Lineær algebra - 16

Karakteristisk ligning/polynomium.

Lad A være en $n \times n$ matrix.
Så er $\lambda \in \mathbb{R}$ en egenværdi for A hvis og kun hvis

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Denne ligning kaldes den karakteristiske ligning for A.

$\det(A - tI_n)$ er et polynomium af grad n.
Det kaldes det karakteristiske polynomium for A.

Rødder i polynomier.

Lad $f(x) = ax^2 + bx + c$ være et polynomium af grad 2. Diskriminanten er $D = b^2 - 4ac$.

Hvis $D > 0$ så har $f(x)$ rødder (nulpunkter) $r_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ og $r_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. Desuden er $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.

Hvis $D = 0$ så har $f(x)$ dobbeltrod $r = \frac{-b}{2a}$ og $f(x) = a(x - r)^2$.

Hvis $D < 0$ så har $f(x)$ ingen reelle rødder.

Lad $f(x) = a_n x^n + a_{a-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ være et polynomium af grad n.

Et tal r siges at være rod i $f(x)$ hvis $f(r) = 0$.

Hvis r er rod i $f(x)$ så findes der et polynomium $g(x)$ af grad $n-1$ så $\underline{f(x) = (x-r)g(x)}$.

Hvis r også er rod i $g(x)$ så findes et polynomium $h(x)$ af grad $n-2$ så $g(x) = (x-r)h(x)$ og dermed $f(x) = (x-r)^2 h(x)$.

Multipliciteten af r som rod i $f(x)$ er det største tal m så $f(x)$ kan skrives som $f(x) = (x-r)^m g(x)$ hvor $g(x)$ er et polynomium af grad $n-m$.

Hvis $f(x)$ har reelle rødder $r_1, r_2, \ldots, r_k$ med multiplicitet henholdsvis $m_1, m_2, \ldots, m_k$ så kan $f(x)$ skrives som

$$f(x) = (x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2} \cdots (x - r_k)^{m_k} g(x),$$

hvor $g(x)$ er et polynomium, der ikke har reelle rødder (f.eks. $g(x) = a_n$).

Multiplicitet af egenværdi.

Lad λ være en egenværdi for matricen A.

Multipliciteten af egenværdien λ defineres da som multipliciteten af λ som rod i det karakteristiske polynomium $\det(A - tI_n)$.

(Dette kaldes også den *algebraiske* multiplicitet af λ.)

Dimensionen af egenrummet $\text{Null}\ (A - \lambda I_n)$ opfylder

$$1 \leq \dim \text{Null}\ (A - \lambda I_n) \leq \text{multipliciteten af } \lambda.$$

Eks, find egenværdier

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_3) = \det\begin{bmatrix} 2-t & 1 & -2 \\ 0 & 3-t & -2 \\ 0 & 1 & -t \end{bmatrix} \quad \text{1. søjle}$$

$$(-1)^{1+1}(2-t)\det\begin{bmatrix} 3-t & -2 \\ 1 & -t \end{bmatrix} = (2-t)\Big((3-t)(-t) - (-2)\cdot 1\Big) =$$

$$(2-t)(-3t + t^2 + 2) = -(t-2)(t^2 - 3t + 2)$$

$$-(t-2)(t^2-3t+2)=0$$

$$\Updownarrow$$

$$t-2=0 \quad \vee \quad t^2-3t+2=0 \qquad D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=1$$

$$\Updownarrow$$

$$t=2 \quad \vee \quad t=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}$$

$$\det(A-tI_3)=-(t-2)(t-2)(t-1)=-(t-2)^2(t-1)$$

Egenværdier: 2 med multiplicitet 2

1 —"— 1

Find basis for egenrum hørende til egenværdi $\lambda=2$

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_1, x_3 frie

$x_2 - 2x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis for egenrom: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

<u>Eks</u> multiplicitet

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det(A - tI_3) = \det \begin{bmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ 0 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 2-t \end{bmatrix}$$

$$= (2-t)^3 = -(t-2)^3$$

Egenverdi 2 multiplicitet 3

Egenrum:

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_1 fri

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Basis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

<u>Eks</u> multiplicitet

A: 8×8 matrix, $\det(A - tI_8) = (t-2)(t-1)^4(t-5)^3$

Egenværdi

2	med multiplicitet	1	,	dim. af egenrum	1
1	— " —	4		—	1, 2, 3 eller 4
5	—	3		—	1, 2 eller 3

Egenværdier af similære matricer.

Lad A og B være similære $n \times n$ matricer, $B = P^{-1}AP$. Så er

$$\det(A - tI_n) = \det(B - tI_n).$$

Da matricerne har samme karakteristiske polynomium, har de de samme egenværdier med de samme multipliciteter.

Desuden har egenrummet for A hørende til egenværdien λ
samme dimension som
egenrummet for B hørende til egenværdien λ.

$$\det(A - tI_n)$$

$$-(A - tI_n) = tI_n - A$$

$$\det(tI_n - A) = (-1)^n \det(A - tI_n)$$

Matlab: poly(A) udregner

$$\det(tI_n - A)$$