Lineær algebra - 18

Diagonalisering af matricer.

Lad A være en $n \times n$ matrix.
A siges at være diagonaliserbar hvis der findes en invertibel matrix P og en diagonalmatrix D så

$$A = PDP^{-1}.$$

A er diagonaliserbar hvis og kun hvis der findes en basis for $\mathbb{R}^n$, der består af egenvektorer for A.

Hvis $\mathbb{R}^n$ har en basis $\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ af egenvektorer, hvor $A\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$
så kan P vælges som

$$P = [\mathbf{p}_1 \ \ \ldots \ \ \mathbf{p}_n]$$

og D er diagonalmatricen med egenværdierne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ på diagonalen.

Det er vigtigt at rækkefølgen af søjler i P svarer til rækkefølgen af egenværdier på diagonalen af D.

Diagonaliseringsalgoritme.
A: en $n \times n$ matrix.

Bestem det karakteristiske polynomium for A, og skriv

$$\det(A - xI_n) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k}g(x),$$

hvor $g(x)$ er et polynomium, der ikke har nogen (reelle) rødder.

Hvis graden af $g(x)$ er mindst 2 og dermed $m_1+m_2+\ldots+m_k < n$ så er A ikke diagonaliserbar.

Hvis $g(x) = \pm 1$ og dermed $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$:
For hver egenværdi λ_i:
find en basis for egenrummet Null $(A - \lambda_i I)$.

Hvis for en af disse egenværdier $\dim \mathrm{Null}\ (A - \lambda_i I) < m_i$ så er A ikke diagonaliserbar.

Ellers:

sæt alle baser for egenrum sammen i en mængde $\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}$, som er basis for $\mathbb{R}^n$. (Sætning 5.3)

Lad $P = [\mathbf{p}_1 \ \ldots \ \mathbf{p}_n]$ og lad

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

være den diagonalmatrix der har egenværdierne for A på diagonalen, sådan at $A\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$.

Så er

$$A = PDP^{-1}.$$

Eks diagonalisering

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -10 & -7 & -10 \\ 10 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_3) = \det \begin{bmatrix} -2-t & 0 & 0 \\ -10 & -7-t & -10 \\ 10 & 5 & 8-t \end{bmatrix}$$

1. rekke

$$= (-2-t)\det \begin{bmatrix} -7-t & -10 \\ 5 & 8-t \end{bmatrix} =$$

$$(-2-t)\big((-7-t)(8-t) - (-10)\cdot 5\big) =$$

$$(-2-t)(-56+7t-8t+t^2+50) = -(t+2)(t^2-t-6)$$

$$t^2 - t - 6 = 0 \qquad D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$$

$$t = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

$$\det(A - tI_3) = -(t+2)(t-3)(t-(-2)) = -(t+2)^2(t-3)$$

Egenværdier

-2 multiplicitet 2

3 multiplicitet 1

Basis for egenrum

$\lambda = -2$

$$A + 2I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -10 & -5 & -10 \\ 10 & 5 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2, x_3 frie

$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\lambda = 3$

$$A - 3I_3 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -10 & -10 & -10 \\ 10 & 5 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 fri

$x_1 = 0$

$x_2 + x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Basene samlet

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Basis for $\mathbb{R}^3$

Sol $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad D = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$

Så er $A = PDP^{-1}$

og f.eks. $A^3 = P \begin{bmatrix} (-2)^3 & & \\ & (-2)^3 & \\ & & 3^3 \end{bmatrix} P^{-1}$

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_2) = \det\begin{bmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{bmatrix} = t^2 + 1$$

$$D = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$$

Ingen egenverdier

A ikke diagonaliserbar.

Anvendelse af diagonalisering.

Hvis $A = PDP^{-1}$ hvor D er diagonalmatricen

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

så er

$$A^m = P \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^m \end{bmatrix} P^{-1},$$

for ethvert positivt helt tal m.