Lineær algebra - 20

Ortogonalt komplement.

W et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Det ortogonale komplement af W er *underrummet*

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} \text{ for alle } \mathbf{u} \in W\}.$$

For enhver vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ findes der entydige vektorer $\mathbf{w} \in W$ og $\mathbf{z} \in W^\perp$ så

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}.$$

$\mathbf{w}$ kaldes den ortogonale projektion af $\mathbf{u}$ på W,
og betegnes $U_W(\mathbf{u})$.
U_W er da en *lineær* operator på $\mathbb{R}^n$.

Ortogonal projektion.

Lad W være et underrum af $\mathbb{R}^n$ med $\dim W = k > 0$ og C være en $n \times k$ matrix hvis søjler udgør en basis for W. Så har ortogonalprojektionsoperatoren U_W standardmatrix

$$P_W = C(C^T C)^{-1} C^T.$$

Den ortogonale projektion af $\mathbf{u}$ på W kan altså beregnes som

$$U_W(\mathbf{u}) = P_W \mathbf{u},$$

eller, hvis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er en *ortonormal* basis, som

$$U_W(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_k)\mathbf{v}_k.$$

Eks på P_W

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad W = \operatorname{span} S$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_W = C(C^TC)^{-1}C^T$$

$$C^TC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(C^TC)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$P_W = \frac{1}{5} C \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} C^T = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Projektion af $\vec{u}$ på W:

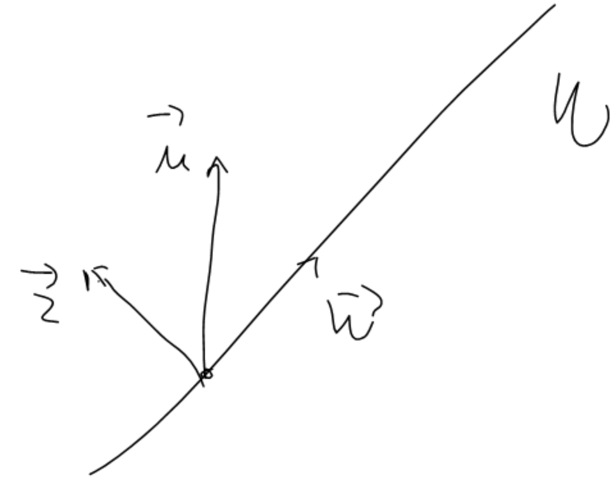
$$P_W \vec{u} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{w}$$

$$\vec{u} = \vec{w} + \vec{z} \quad , \quad \vec{z} \in W^{\perp}$$

$$\vec{z} = \vec{u} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Afstand fra $\vec{u}$ til W

$$\|\vec{z}\| = \sqrt{0^2+0^2+1^2+1^2} = \sqrt{2}$$



<u>Eks</u> ortogonal projektion

$$W = \operatorname{Span}\{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}, \quad \vec{q}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \vec{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\|\vec{q}_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1, \quad \|\vec{q}_2\| = 1$$

$\{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$ er ortonormal basis for W

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Projektion af $\vec{u}$ på W:

$$(\vec{u} \cdot \vec{q}_1)\,\vec{q}_1 + (\vec{u} \cdot \vec{q}_2)\,\vec{q}_2 =$$

$$5 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

Underrum knyttet til matricer.

For ethvert underrum W af $\mathbb{R}^n$ er

$$\dim W + \dim W^{\perp} = n \quad \text{og} \quad (W^{\perp})^{\perp} = W.$$

For enhver matrix A er

$$(\text{Row } A)^{\perp} = \text{Null } A.$$

Ethvert underrum W af $\mathbb{R}^n$ er søjlerum af en matrix og dermed også rækkerum af den transponerede matrix: $W = \text{Row } A$.
Det ortogonale komplement bestemmes altså som $W^{\perp} = \text{Null } A$.

Desuden kan vi nu se at enhvert underrum W af $\mathbb{R}^n$ er nulrum af en matrix:
Lad A være en matrix så $\text{Row } A = W^{\perp}$.
Så er $\text{Null } A = (\text{Row } A)^{\perp} = (W^{\perp})^{\perp} = W$.

Exs Basis for $W^\perp$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad W = \operatorname{Span} S$$

Find basis for $W^\perp = S^\perp$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{Row} A = W$$

$$\vec{x} \in W^\perp \iff A\vec{x} = \vec{0}$$

$$W^\perp = \operatorname{Null} A$$

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

x_3, x_4 free

$$x_1 + x_3 - x_4 = 0$$

$$x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 + x_4 \\ x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basis for $W^\perp$. $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ortogonale matricer.

En $n \times n$ matrix $Q = [\mathbf{q}_1 \ \ldots \ \mathbf{q}_n]$ siges at være ortogonal hvis $\{\mathbf{q}_1 \ \ldots \ \mathbf{q}_n\}$ er en orto*normal* mængde af vektorer
(og dermed er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$).

Det betyder at Q ortogonal hvis og kun hvis

$$\underline{Q^T Q = I_n.}$$

En ortogonal matrix Q er altså invertibel med invers

$$Q^{-1} = Q^T.$$

Det betyder at Q er en ortogonal matrix hvis og kun hvis Q^T er en ortogonal matrix.
Og at rækkerne i en ortogonal matrix er en ortonormal mængde af vektorer.

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

er ortogonal da $Q^T Q = I_4$