Lineær algebra - 22

Ortogonale matricer.

En $n \times n$ matrix $Q = [\mathbf{q}_1 \ \ldots \ \mathbf{q}_n]$ siges at være ortogonal hvis $\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ er orto*normal*, altså hvis $Q^T Q = I_n$.

Hvis Q er en ortogonal matrix så er determinanten

$$\det Q = \pm 1.$$

Hvis P og Q er ortogonale matricer så er PQ en ortogonal matrix.

En $n \times n$ matrix Q er en ortogonal matrix hvis og kun hvis

$$||Q\mathbf{u}|| = ||\mathbf{u}||.$$

Q er altså ortogonal hvis og kun hvis Q bevarer norm (og dermed afstand).

Lad Q være en **ortogonal** 2×2 **matrix**.

Hvis $\det Q = 1$ så er $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ for en vinkel θ.
Q er matricen for en rotation med vinklen θ.

Hvis $\det Q = -1$ så er $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ for en vinkel θ.
Q har egenvektorer $\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ med egenværdier henholdsvis 1 og -1.
Q er matricen for en spejling om linien med retningsvektor $\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$.
Denne linie er egenrum for Q med egenværdi 1.

Lad Q være en **ortogonal** 3×3 **matrix**.

Så er Q matricen for en rotation hvis og kun hvis $\det Q = 1$.

Hvis P og Q er matricer for rotationer i $\mathbb{R}^3$ så er P og Q ortogonal matricer med determinant 1.
Så er PQ også en ortogonal matrix med determinant 1 og derfor er PQ også matricen for en rotation.

En funktion $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ kaldes en **flytning** (rigid motion) hvis den bevarer afstand altså hvis

$$||F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{v})|| = ||\mathbf{u} - \mathbf{v}||,$$

for alle vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Lad $\mathbf{b} = F(\mathbf{0})$ og $T(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) - \mathbf{b}$. Så er T en lineær transformation og en flytning. Standardmatricen for T er så en ortogonal matrix.

F kan altså skrives som

$$F(\mathbf{v}) = Q\mathbf{v} + \mathbf{b},$$

hvor Q er en ortogonal matrix.

(I litteraturen stilles ofte et yderligere krav for at F kaldes en flytning: nemlig at $\det Q = 1$ således at der ikke indgår spejlinger.)

Symmetriske matricer.

A en $n \times n$ matrix.

$\mathbb{R}^n$ har en ortonormal basis, hvis vektorer er egenvektorer for A

hvis og kun hvis

A er symmetrisk, altså $A^T = A$.

Diagonalisering af symmetriske matricer.

Lad A være en symmetrisk $n \times n$ matrix og lad $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ være en ortonormalbasis for $\mathbb{R}^n$ så $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ hvor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ er egenværdierne for A.

Lad $P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \ldots \ \mathbf{v}_n]$
og $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ en diagonalmatrix.

Så er P en ortogonal matrix og

$$A = PDP^T.$$