4.1

Definition af underrum

En mængde W af vektorer i $\mathbb{R}^n$ er et underrum af $\mathbb{R}^n$ hvis

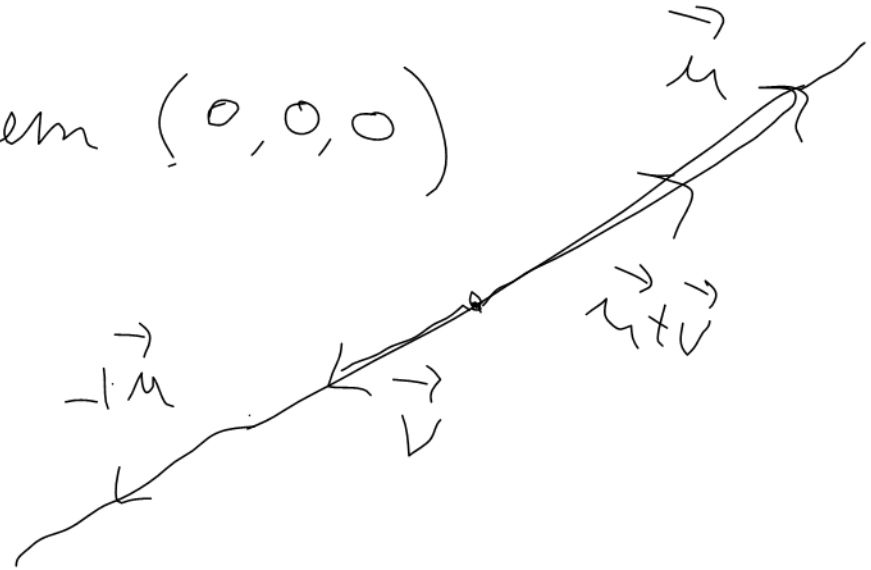
1. $\vec{0} \in W$

2. Hvis $\vec{u}, \vec{v} \in W$ så er $\vec{u}+\vec{v} \in W$

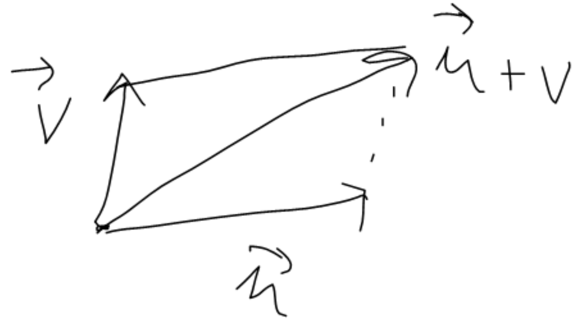
3. Hvis $\vec{u} \in W$ og $c \in \mathbb{R}$
   så er $c\vec{u} \in W$

Underrum af $\mathbb{R}^3$:

- en linie i $\mathbb{R}^3$ gennem $(0,0,0)$



- en plan i $\mathbb{R}^3$ gennem $(0,0,0)$



- $\{\vec{0}\}$ er et underrum
- $\mathbb{R}^3$ er et underrum

EKS $\quad 2x + 3y - z = 0$ ligning for plan gennem $(0,0,0)$

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + 3y - z = 0 \right\}$$

er et underrum af $\mathbb{R}^3$.

Sætning 4.2

Betragt: A en $m \times n$ matrix

og homogent ligningssystem $A\vec{x} = \vec{0}$

Løsningsmængden $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$

er et underrum af $\mathbb{R}^n$

W kaldes nulrummet af A

Skrives $W = \text{Null } A$

Bevis

1. $\vec{0} \in W$ da $A\vec{0} = \vec{0}$

2. Hvis $\vec{u}, \vec{v} \in W$ så er $A\vec{u} = \vec{0}$ og $A\vec{v} = \vec{0}$

og $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

Altså $\vec{u} + \vec{v} \in W$

3. Hvis $\vec{u} \in W$ og $c \in \mathbb{R}$

så $A(c\vec{u}) = cA\vec{u} = c\cdot\vec{0} = \vec{0}$

Altså $c\vec{u} \in W$.

Sætning 4.1

Lad $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Så er $W := \operatorname{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k\}$

$$= \{c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2 + \ldots + c_k\vec{w}_k \mid c_1 \ldots c_k \in \mathbb{R}\}$$

et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Kaldes underrummet udspændt af $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}$

Bevis

1. $\vec{0} = 0\vec{w}_1 + 0 \cdot \vec{w}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{w}_k \in W$

2. Hvis $\vec{u} = a_1 \vec{w}_1 + \ldots + a_k \vec{w}_k$

og $\vec{v} = b_1 \vec{w}_1 + \ldots + b_k \vec{w}_k$

Så er

$$\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1)\vec{w}_1 + \ldots + (a_k + b_k)\vec{w}_k$$

Altså $\vec{u} + \vec{v} \in W$

3.

<u>EKS</u> Hvis $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$

så er span$\{\vec{u}\}$ en linie i $\mathbb{R}^3$

gennem $(0,0,0)$

Altså: et underrum.

Definition af Col A

Hvis $A = [\vec{w}_1 \ \vec{w}_2 \ \dots \ \vec{w}_k]$

så kaldes span$\{\vec{w}_1 \dots \vec{w}_k\}$ søjlerummet

af A skrives Col A

<u>EKS</u> Fra nulrum til span

$$x + y + z = 0$$
$$x + 2y - z = 0$$

To planer i $\mathbb{R}^3$

Skæring: linie i $\mathbb{R}^3$

gennem $(0,0,0)$

Udvidet matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x + 3z = 0$$
$$y - 2z = 0$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3z \\ 2z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Løsning: $\text{Null} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

<u>Generell</u> A: $m \times n$ matrix

Der findes $\vec{w}_1, \ldots \vec{w}_k$ så

Så $\text{Null}\, A = \text{span}\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}$,

Undtagen hvis $\text{Null}\, A = \{\vec{0}\}$

4.2

Definition af basis

V : et underrum af $\mathbb{R}^n$, $V \neq \{\vec{0}\}$

En basis for V er en mængde

$$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots \vec{b}_k\}$$ af vektorer i V

som opfylder

- span $B = V$
- B er lineært uafhængig.

EKS $\quad V = \mathbb{R}^n, \quad B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$

B er en basis for $\mathbb{R}^n$

$\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + \ldots + u_n\vec{e}_n$$

EKS

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} = -36 \neq 0$$

$$\text{rref} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pivot i alle søjler $\Rightarrow$ søjlerne er lineært uafhængige.

pivot i alle rækker $\Rightarrow$ søjlerne udspænder $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$ er basis for $\mathbb{R}^3$.

<u>EKS:</u> $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ er basis for Span $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(= Null se ovenfor)