5.3

Eks

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_3) = -(t+1)(t-2)^2$$

Egenverdier -1 og 2.

Egenrom

$\lambda = -1$

$$A + I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 fri $\quad x_1 - x_3 = 0 \quad x_2 - x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\lambda = 2$

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2, x_3 free

$x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \}$$

~~basis~~ basis for $\mathbb{R}^3$

T : en linear operator på $\mathbb{R}^3$
med standard matrix A, $T(\vec{x}) = A\vec{x}$

$$T(\vec{b}_1) = A\vec{b}_1 = -\vec{b}_1 = -1 \cdot \vec{b}_1 + 0 \cdot \vec{b}_2 + 0 \cdot \vec{b}_3$$

$$[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{b}_2) = A\vec{b}_2 = 2\vec{b}_2$$
$$= 0 \cdot \vec{b}_1 + 2 \cdot \vec{b}_2 + 0 \cdot \vec{b}_3$$

$$[T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{b}_3) = A\vec{b}_3 = 2\vec{b}_3 \qquad \left[T(\vec{b}_3)\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matrix representation T w.r.t. $\mathcal{B}$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \left[T(\vec{b}_1)\right]_{\mathcal{B}} & \left[T(\vec{b}_2)\right]_{\mathcal{B}} & \left[T(\vec{b}_3)\right]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D \qquad \text{diagonal matrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1}AB = D \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dvs: $\quad A = BDB^{-1}$

Definition

A: $n \times n$ matrix

A siges at være diagonaliserbar hvis der en $n \times n$ diagonal matrix D og en invertibel $n \times n$ matrix P sådan at

$$A = PDP^{-1}$$

Sætning 5.2

1) Hvis $\{\vec{P}_1 \ldots \vec{P}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$ og der findes egenværdier $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ så

$$A\vec{P}_1 = \lambda_1 \vec{P}_1 \quad \ldots \quad A\vec{P}_n = \lambda_n \vec{P}_n$$

så er $A = PDP^{-1}$

hvor $P = [\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n]$ og $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

2) Hvis $\underline{A = PDP^{-1}}$ hvor $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

så er søjlerne i P egenvektor for A
med egenværdier $\lambda_1 \text{---} \lambda_n$
(og søjlerne i P er basis for $\mathbb{R}^n$)

Anvendelse af diagonalisering

Udregn A^{100} hvor A er $n \times n$ matrix.

Find en diagonalisering $A = PDP^{-1}$
(hvis muligt)

$$A^2 = AA = PDP^{-1}PDP^{-1} = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

$$A^3 = PDDDP^{-1} = PD^3P^{-1}$$

$$A^{100} = PD^{100}P^{-1}$$

Hvis $D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ så er $D^{100} = \begin{bmatrix} a^{100} & 0 & 0 \\ 0 & b^{100} & 0 \\ 0 & 0 & c^{100} \end{bmatrix}$

Eksempel diagonalisering

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - tI_3) = -(t-3)(t-1)^2$$

Egenverdier 1 og 3

Egenrom, $\lambda = 1$

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Én fri variabel

Dimension af egenrum 1
Multiplicitet af egenværdi : 2

Højst 2 lineært uafhængig egenvektor
1 for hver egenværdi.
De udgør ikke basis for $\mathbb{R}^3$
A er ikke diagonaliserbar.

Eksempel. diagonalisering

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_4) =$$

$$t(t-6)(t^2+1) =$$

$$(t-0)(t-6)(t^2+1)$$

Egenverdier $0, 6$ hver med multiplicitet 1

$$t^2+1 \geq 1$$

Høyst 2 lineært uavhengige egenvektorer.

A <u>ikke</u> diagonaliserbar

<u>Eks</u> diagonalisering

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 5 & 3 & -1 \\ -17 & 13 & 7 & 1 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \\ -15 & 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_4) = (t+3)(t-3)(t-6)(t-9)$$

Egenværdier: $-3, 3, 6, 9$

hver med multiplicitet 1.

Hvert egenrum har dimension 1.

Find basis for hvert egenrum

P: 4×4 matrix med disse basisvektorer som søjler

$$D = \begin{bmatrix} -3 & & & 0 \\ & 3 & & \\ & & 6 & \\ 0 & & & 9 \end{bmatrix}$$

Så er $A = PDP^{-1}$

<u>Eksempel</u> diagonalisering

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_2) = \det \begin{bmatrix} 2-t & 2 \\ 1 & 1-t \end{bmatrix} =$$

$$(2-t)(1-t) - 2 \cdot 1 = 2 - 2t - t + t^2 - 2 =$$

$$t^3 - 3t = t(t-3) = (t-0)(t-3)$$

Egenrum $\lambda = 0$

$$A - 0 I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 fri $\quad x_1 + x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Basis} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Egenrum $\lambda = 3$

$$A - 3 I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 fri $\quad x_1 - 2x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Basis } \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{Så er } A = PDP^{-1}$$

$$\left(\text{eller } D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$