Reeksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet & Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Torsdag den 18. august, 2011. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 8 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice"opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

HOLD NUMMER:
- ☐ Hold 2 (v. Jacob Broe)
- ☐ Hold 3 (v. Olav Geil)
- ☐ Hold 4 (v. Morten Nielsen)
- ☐ Hold 5 (v. Bo Rosbjerg)
- ☐ Hold 6 (v. Nikolaj Hess-Nielsen)

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (6%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Udregn $AB + AC$.

Opgave 2 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Find A^{-1}.
2. Bestem determinanten af A.
3. Bestem determinanten af A^{-1}.

Opgave 3 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 4 \\ -3 & -9 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Find en basis for søjlerummet hørende til A.
2. Find en basis for nulrummet hørende til A.

Opgave 4 (8%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Find egenværdierne for A.
2. Find en basis for hvert af de tilhørende egenrum.

Opgave 5 (10%).

Lad W være løsningsmængden til

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Lad $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

1. Bestem den ortogonale projektionsmatrix P_W.
2. Find $\mathbf{w} \in W$ og $\mathbf{z} \in W^{\perp}$, så $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$.
3. Find afstanden fra $\mathbf{u}$ til W.

Opgave 6 (8%).

Lad

$$W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

1. Vis, at $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for W.
2. Argumenter for, at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ ligger i W.
3. Vis at $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for $\mathbf{R}^3$ og find $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

Opgave 7 (10%).

Det oplyses, at

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

kan skrives som $A = PDP^{-1}$, hvor

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. Find den partikulære løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \qquad\quad + 4y_3 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 \; - y_3 \\ y_3' &= \qquad\qquad\quad 5y_3 \end{aligned}$$

som opfylder bibetingelsen

$$\begin{cases} y_1(0) &= -1 \\ y_2(0) &= 5 \\ y_3(0) &= 1. \end{cases}$$

Opgave 8 (8%).

I denne opgave arbejdes der med lineære transformationer fra $\mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}^2$.

1. Opskriv matricen for en spejling i anden-aksen.
2. Opskriv matricen for en rotation om origo mod uret med 45°.
3. Opskriv matricen, som svarer til, at vi først spejler som i delspørgsmål 1 og dernæst roterer som i delspørgsmål 2.

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (4%).

Der er givet to vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$, som er lineært *afhængige*, og $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Sæt

$$H = \operatorname{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}.$$

Afkryds det sande udsagn nedenfor.

- ☐ H kan beskrives som et paralellogram i $\mathbf{R}^3$.
- ☐ H kan beskrives som en plan i $\mathbf{R}^3$.
- ☐ H kan beskrives som en linie i $\mathbf{R}^3$.

Opgave 10 (10%).

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & -7 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Afkryds *samtlige* sande udsagn nedenfor (bemærk: hver forkert afkrydsning *ophæver* én rigtig afkrydsning).

- ☐ A er ikke-inverterbar (singulær).
- ☐ Den lineære transformation induceret af A er injektiv (engelsk: one-to-one).
- ☐ A er på række-echelonform (trappeform).
- ☐ nullity $A = 1$.
- ☐ rank $A = 3$.
- ☐ nullity A + rank $A = 3$.
- ☐ Tallet 2 er egenværdi for A.
- ☐ A er på reduceret række-echelonform (reduceret trappeform).
- ☐ Der findes et $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$, således at ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke er konsistent.
- ☐ $\det A = 0$.
- ☐ $\det A = -14$.

Opgave 11 (6%).

Der er givet en lineær afbildning $T\colon \mathbf{R}^8 \to \mathbf{R}^m$. Besvar følgende to spørgsmål.

Bestem den mindste værdi af m, for hvilken der med sikkerhed gælder, at T *ikke* er surjektiv (engelsk: onto):

☐ 0	☐ 2	☐ 4	☐ 6	☐ 8	☐ 10
☐ 1	☐ 3	☐ 5	☐ 7	☐ 9	☐ 11

Bestem den mindste værdi af m, for hvilken der gælder, at T *kan* være være injektiv (engelsk: one-to-one):

☐ 0	☐ 2	☐ 4	☐ 6	☐ 8	☐ 10
☐ 1	☐ 3	☐ 5	☐ 7	☐ 9	☐ 11

Opgave 12 (10%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

a. En 4×4-matrix med de fire egenværdier $-1, 0, 1, 5$ er diagonaliserbar.

☐ Sand ☐ Falsk

b. Der findes en lineær transformation $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ således at

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

☐ Sand ☐ Falsk

c. Lad W være et underrum af $\mathbf{R}^5$ med dimensionen 4. Så gælder altid, at 4 lineært uafhængige vektorer i W udgør en basis for W.

☐ Sand ☐ Falsk

d. Lad A og B være 3×3-matricer. Hvis $AB = O$ så gælder $A = O$ eller $B = O$.

☐ Sand ☐ Falsk

e. Enhver symmetrisk 2×2-matrix kan diagonaliseres.

☐ Sand ☐ Falsk