Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
& Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Onsdag den 22. februar, 2012. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 7 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice"opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

HOLDNUMMER:
- ☐ HOLD 1 (v. Jacob Broe).
- ☐ HOLD 2 (v. Olav Geil).
- ☐ HOLD 3 (v. Leif Kjær Jørgensen).
- ☐ HOLD 4 (v. Bo Rosbjerg).
- ☐ HOLD 5 (v. Martin Raussen).

Del I ("almindelige opgaver")

Opgave 1 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

1. Bring A på reduceret trappeform (reduceret echelonform).
2. Løs ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Opgave 2 (6%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Betragt følgende fire udtryk. For hvert af udtrykkene skal du afgøre, om det giver mening. Hvis det ikke giver mening, skriv da "giver ikke mening". Hvis det giver mening, udregn da værdien.

1. AB 2. AB^T 3. B^TA 4. $B\mathbf{c}$.

Opgave 3 (9%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Bestem A^{-1}.
2. Bestem $\left(A^T\right)^{-1}$.

Opgave 4 (9%).

En lineær transformation (lineær afbildning) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er givet ved

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

1. Bestem $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ og $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.
2. Opskriv standardmatricen A hørende til T.
3. Er A standardmatricen for en rotation? (Med andre ord: Svarer T til en rotation?)

Opgave 5 (10%).

1. Vis, at
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$
er en basis for $\mathbb{R}^3$.
2. Lad
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$
Bestem B^{-1}.
3. En lineær operator $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har standardmatricen
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Bestem $[T]_{\mathcal{B}}$.

Opgave 6 (10%).

Givet matricen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Find egenværdierne hørende til A.
2. Find de tilhørende egenvektorer.
3. Diagonaliser A. Dvs. bestem en diagonalmatrix D og en invertibel (inverterbar, regulær) matrix Psåledes at $A = PDP^{-1}$.

Opgave 7 (8%).

Underrummet $W \subseteq \mathbb{R}^4$ har basis

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

1. Bestem en ortogonal basis for W ved hjælp af Gram-Schmidt processen.

Opgave 8 (10%).

Givet

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{og} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

1. Bestem matricen P_W for ortogonalprojektionen af $\mathbb{R}^3$ på W.
2. Bestem vektorerne $\mathbf{w} \in W$ og $\mathbf{z} \in W^{\perp}$ således at $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$.

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (4%).

Der er givet to forskellige vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^3$ så $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ er lineært afhængig. Sæt $H = \text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.
Præcis et af følgende udsagn er korrekt. Afkryds dette.

- ☐ Dimensionen af H er 2.
- ☐ Dimensionen af H er 3
- ☐ H kan beskrives som en linie i $\mathbb{R}^3$.

Opgave 10 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Afkryds *samtlige* sande udsagn nedenfor (bemærk: hver forkert afkrydsning *ophæver* én rigtig afkrydsning).

- ☐ $\det A = 24$.
- ☐ $\det A = 240$.
- ☐ A er invertibel (inverterbar, regulær).
- ☐ A er symmetrisk.
- ☐ A er ortogonal.
- ☐ 4 er egenværdi for A.
- ☐ 10 er egenværdi for A.
- ☐ rank $A = 4$.
- ☐ Den lineære transformation $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ givet ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ er injektiv (engelsk: one-to-one).
- ☐ Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning for enhver vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$.

Opgave 11 (6%).

For en matrix A med 2 rækker og 4 søjler skal man besvare følgende tre spørgsmål.

Bestem den højst mulige rang for A:

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Bestem den højst mulige nullitet (engelsk: nullity) for A:

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Bestem den mindst mulige nullitet (engelsk: nullity) for A:

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Opgave 12 (8%).

Besvar følgende fire sand/falsk opgaver:

a. Matricen $A = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{bmatrix}$ er ortogonal.

☐ Sand ☐ Falsk

b. Der findes en lineær transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ som er surjektiv (engelsk: on-to).

☐ Sand ☐ Falsk

c. Lad W være et underrum af $\mathbb{R}^6$ med dimension 5. Så er dimensionen af $W^\perp$ lig 1.

☐ Sand ☐ Falsk

d. Lad W være underrummet fra delspørgsmål c. Der findes præcis en vektor, som tilhører både W og $W^\perp$.

☐ Sand ☐ Falsk