1.2

$$\underbrace{3\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}2\\-5\end{bmatrix}}_{\text{en linear kombination af } \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix}2\\-5\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\-10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13\\-7\end{bmatrix}$$

Generelt: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \in \mathbb{R}^n$

$c_1, c_2, \dots, c_p \in \mathbb{R}$

$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_p\vec{v}_p$ er linear kombination af $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$.

Eks

$$\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \qquad \vec{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Standard vektorer i $\mathbb{R}^n$

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \ldots + v_n\vec{e}_n$$

Eks

Er $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ en linear kombination af $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$?

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2x + y \\ 3x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \implies (2x + y) + (3x - y) = 5x = 4 + 1 = 5$$

$$x = 1$$
$$y = 2$$

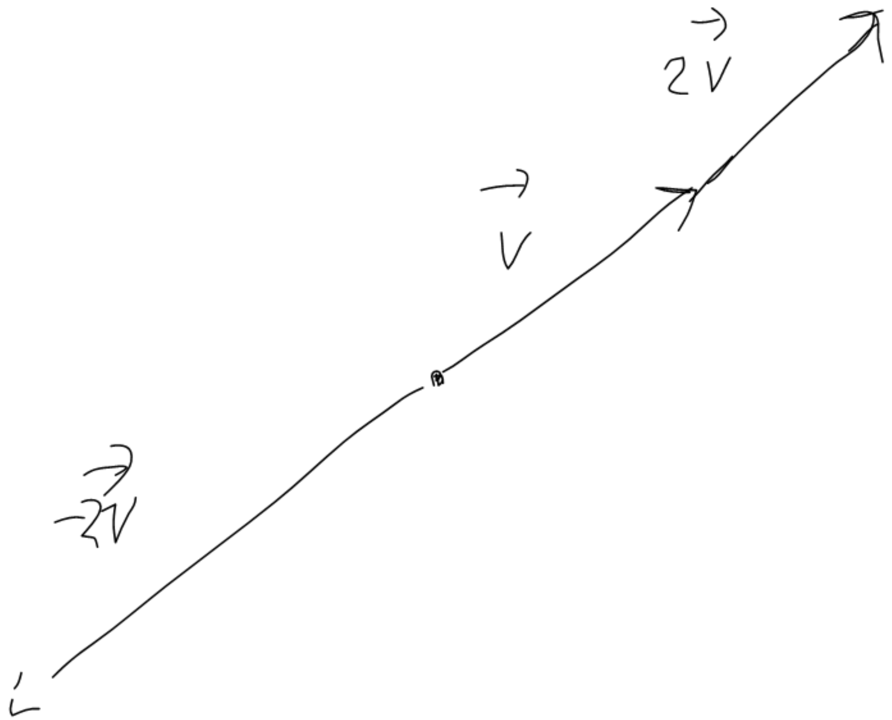
Svar: JA

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Parallelle vektorer

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ er parallelle hvis

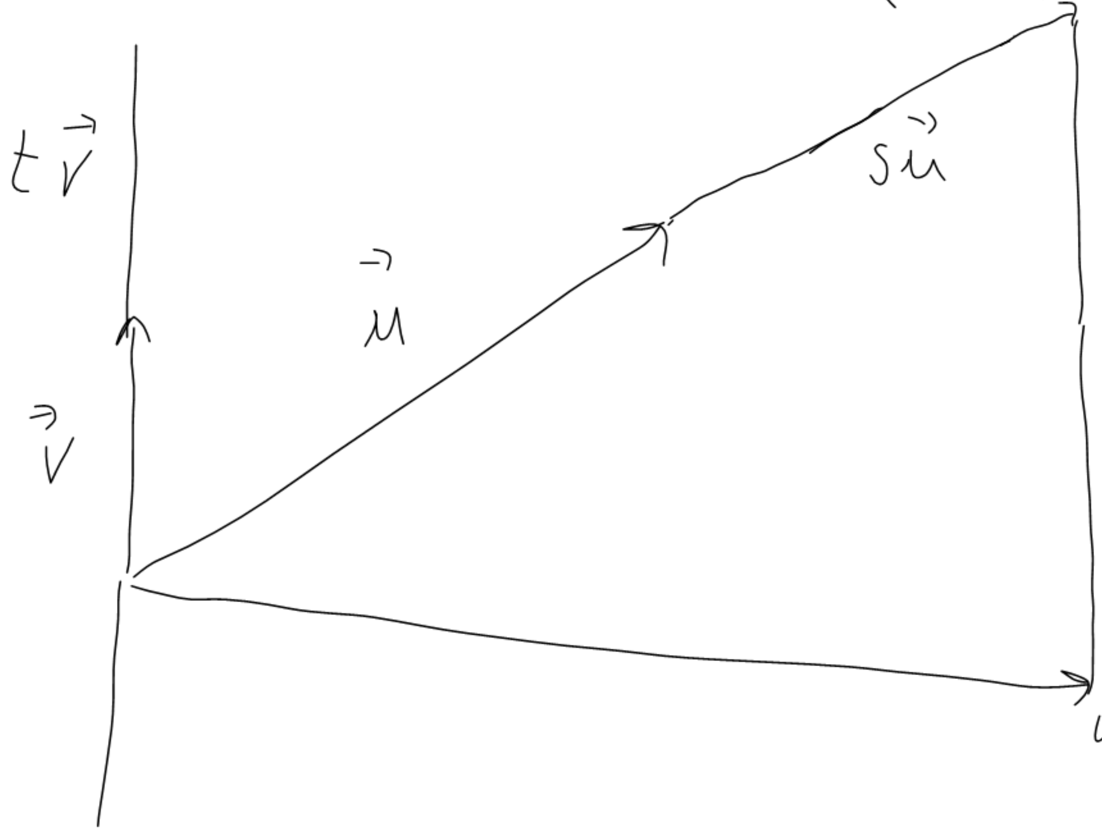
$\vec{u} = c\vec{v}$ eller $\vec{v} = c\vec{u}$ hvor $c \in \mathbb{R}$



Hvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ikke-parallelle vektorer i planen $(\mathbb{R}^2)$

og $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$

så er $\vec{w}$ linear kombination af $\vec{u}$ og $\vec{v}$



$$\vec{w} = 1.7\,\vec{u} - 2.3\,\vec{v}$$

6.1

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

har længde

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Generelt:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$ har længde / norm

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

Eks

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$ har længde

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2 + 4^2} =$$

$$\sqrt{4 + 1 + 4 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$\vec{u} = \frac{1}{5}\vec{v}$ har længde $\|\vec{u}\| = \frac{1}{5}\|\vec{v}\| = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$

$\vec{u}$ er enhedsvektor

$\vec{u}$ er $\vec{v}$ normaliseret.

Regneregler: $\|c\vec{v}\| = |c| \cdot \|\vec{v}\|$

Prikprodukt

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Så er

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n \in \mathbb{R}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v_1 v_1 + v_2 v_2 + \ldots + v_n v_n = \| v \|^2$$

Eks

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix} = 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-6) = -8$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 - 3 - 6 + 8 = 0$$

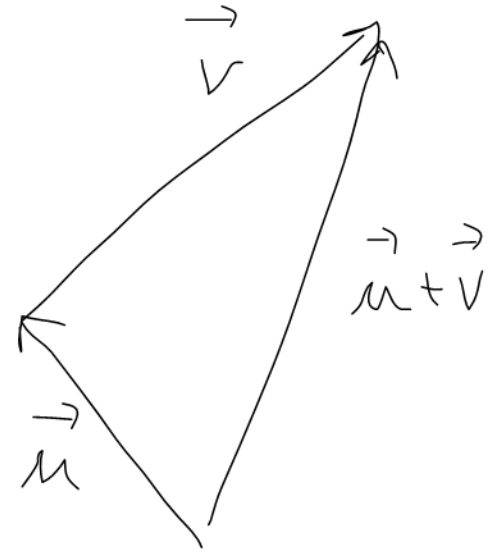
Vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$ er ortogonale (vinkelrette) hvis $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Setning 6.2 (Pythagoras)

Hvis $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

så er
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

hvis og kun hvis
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$



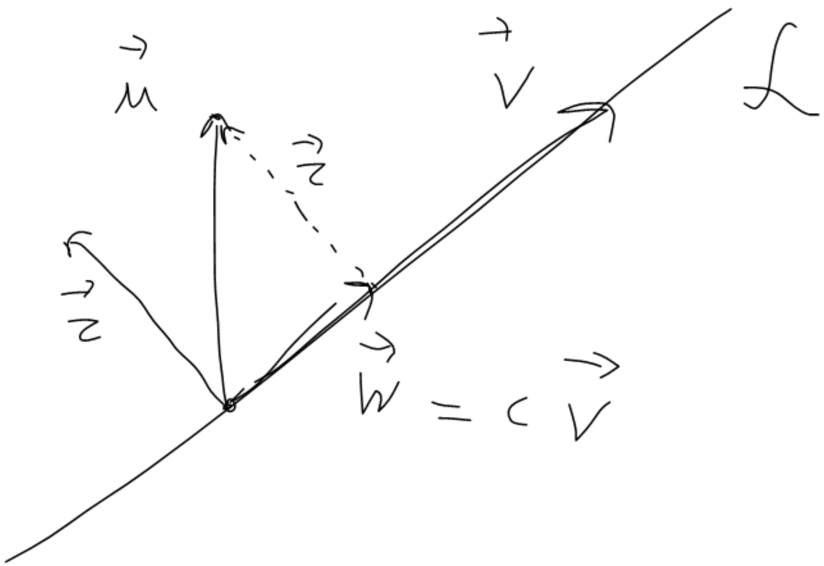
Bevis

$$\underline{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2} = (\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}+\vec{v}) =$$

$$\vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} =$$

$$\underline{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2} + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$$

Ortogonal projektion $\vec{w}$
af $\vec{u}$ på linie $\mathcal{L}$ med retningsvektor $\vec{v}$



$$\vec{z} = \vec{u} - \vec{w}$$

Ortogonal: $0 = \vec{z} \cdot \vec{v} = (\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{v} =$

$$(\vec{u} - c\vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} - c\,\vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$c = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Projektion $\vec{w}$ af $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ på $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$c = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2)}{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \frac{1}{9}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{9}\vec{v} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$