4.5

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear transformation.

Hvis $m = n$ så kaldes T en lineær operator på $\mathbb{R}^n$

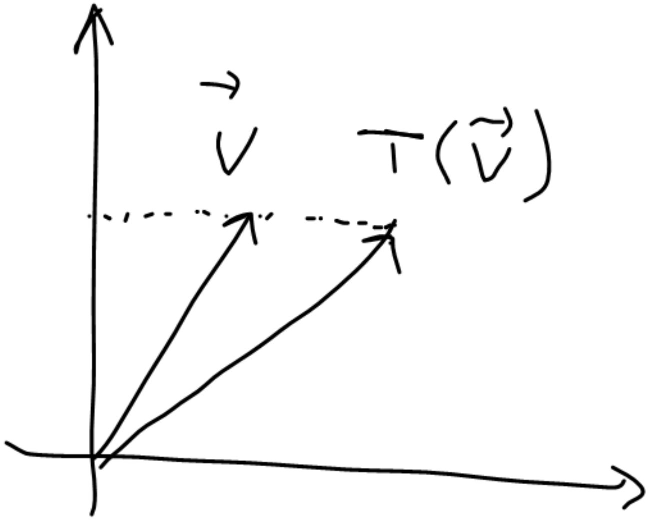
Eks

T lineær operator på $\mathbb{R}^2$ med standardmatrix $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A$

$$A = \left[T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2) \right]$$

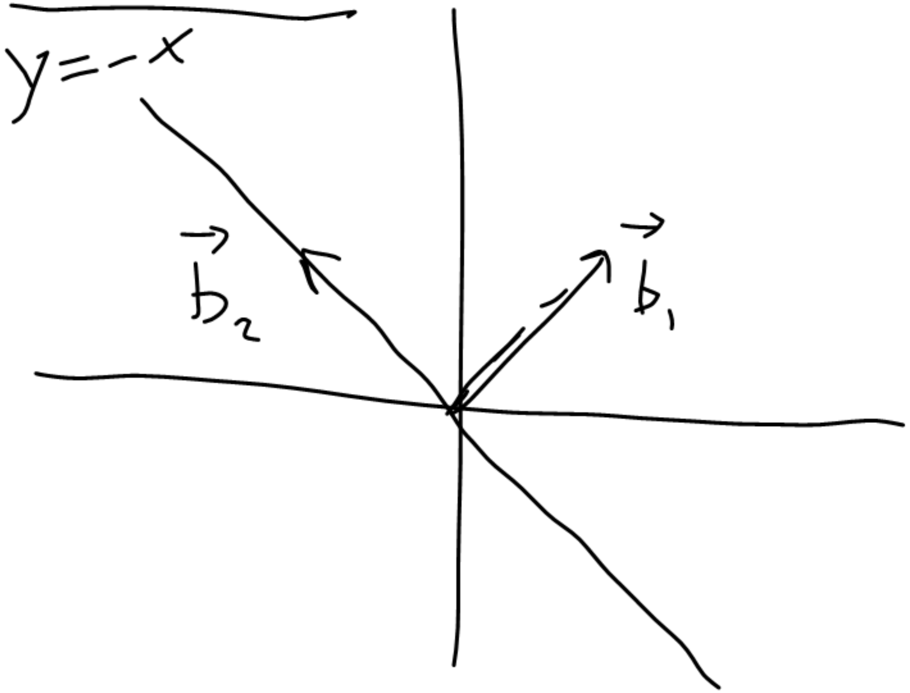
$$= \left[\left[T(\vec{e}_1) \right]_{\mathcal{E}} \quad \left[T(\vec{e}_2) \right]_{\mathcal{E}} \right] \quad \text{hvor } \mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$$

$$T(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 \quad , \quad T(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$$



T : fordobler afstand fra y-aksen

Eks 2



T : linear operator på $\mathbb{R}^2$, T fordobler afstand fra linien $y=-x$

Ny basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$

hvor $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$T(\vec{b}_1) = 2\vec{b}_1 = 2\vec{b}_1 + 0 \cdot \vec{b}_2$$

$$T(\vec{b}_2) = \vec{b}_2$$

$$\left[\, [T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \;\; [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} \, \right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definition

Hvis T er en lineær operator på $\mathbb{R}^n$ og $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ er basis for $\mathbb{R}^n$ så defineres matrix repræsentationen af T m.h.t. basen $\mathcal{B}$ som

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \; [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} \; \ldots \; [T(\vec{b}_n)]_{\mathcal{B}} \right]$$

<u>Eks</u> Hvis $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ er standardbasis for $\mathbb{R}^n$ så er

$$[T]_{\mathcal{E}} = \Big[[T(\vec{e}_1)]_{\mathcal{E}} \ \ldots \ [T(\vec{e}_n)]_{\mathcal{E}} \Big]$$

$$= \Big[T(\vec{e}_1) \ \ldots \ T(\vec{e}_n) \Big]$$

= standard matrix

Eks 2, fortsat

$\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T(\vec{b}_1) = 2\vec{b}_1$, $T(\vec{b}_2) = \vec{b}_2$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Find standard matrix.

Sætning 4.12

Hvis A er standardmatrix for en lineær operator T på $\mathbb{R}^n$ og $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$, $B = [\vec{b}_1 \;\cdots\; \vec{b}_n]$

så er $[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1} A B$

og dermed $A = B [T]_{\mathcal{B}} B^{-1}$

Bevis $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = B^{-1} \vec{v}$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \; \cdots\cdots \; [T(\vec{b}_n)]_{\mathcal{B}} \right]$$

$$= \left[[A\vec{b}_1]_{\mathcal{B}} \; \cdots \; [A\vec{b}_n]_{\mathcal{B}} \right]$$

$$= \left[B^{-1}A\vec{b}_1 \quad \cdots \quad B^{-1}A\vec{b}_n \right]$$

$$= B^{-1}A\left[\vec{b}_1 \ \cdots \ \vec{b}_n \right] = B^{-1}AB.$$

<u>Eks 2, fortsat</u>

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Find standardmatrix $A = B[T]_{\mathcal{B}}B^{-1}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\text{eller } \begin{bmatrix} B & I_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_2 & B^{-1} \end{bmatrix}\right)$$

$$A = B\,[T]_{\mathcal{B}}\,B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Teori:

$$[T]_{\mathcal{B}} [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = (B^{-1}AB)(B^{-1}\vec{v}) =$$

$$B^{-1}A\vec{v} = B^{-1}T(\vec{v}) = [T(\vec{v})]_{\mathcal{B}}$$

$$\boxed{[T]_{\mathcal{B}} [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [T(\vec{v})]_{\mathcal{B}}}$$

Hvis $\mathcal{B}$ er standardbasis: $A\vec{v} = T(\vec{v})$

Eks T: linear operator på $\mathbb{R}^3$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{basis for } \mathbb{R}^3$$

Find matrix representation af T m.h.t. $\mathcal{B}$.

Standardmatrix for T:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1}AB = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Hvis

$$\vec{v} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Definition (afsnit 5.1)

Lad T være en lineær operator på $\mathbb{R}^n$

En vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ i $\mathbb{R}^n$

kaldes en egenvektor hvis der findes et

tal λ så

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

λ kaldes en egenværdi.

Eksempel (afsnit 4.5)

Lad $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \right\}$

en basis for $\mathbb{R}^3$

T: en lineær operator på $\mathbb{R}^3$

som opfylder:

$$T(\vec{b}_1) = 2\vec{b}_1$$

$$T(\vec{b}_2) = 3\vec{b}_2$$

$$T(\vec{b}_3) = -\vec{b}_3$$

$\mathcal{B}$ er en basis der består af egenvektorer.

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \ [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} \ [T(\vec{b}_3)]_{\mathcal{B}} \right] =$$

$$\left[\left[2\vec{b}_1 \right]_{\mathcal{B}} \quad \left[3\vec{b}_2 \right]_{\mathcal{B}} \quad \left[-\vec{b}_3 \right]_{\mathcal{B}} \right] =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Standardmatrix for T

$$A = B\,[T]_{\mathcal{B}}\,B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$