5.3

Eks

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_3) = -(t+1)(t-2)^2$$

Egenværdier: -1, 2

Egenrum:

$\lambda = -1$

$$A - (-1)I_3 = A + I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 free , $x_1 - x_3 = 0$, $x_2 - x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis for eigenspace $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\underline{\lambda = 2}$

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2, x_3 free $\qquad x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis for egenrum: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \}$$

en basis for $\mathbb{R}^3$.

T: linear operator på $\mathbb{R}^3$
med standardmatrix A.

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

$$T(\vec{b}_1) = A\vec{b}_1 = -\vec{b}_1 = (-1)\cdot\vec{b}_1 + 0\cdot\vec{b}_2 + 0\cdot\vec{b}_3$$

$$[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{b}_2) = A\vec{b}_2 = 2\vec{b}_2 = 0\cdot\vec{b}_1 + 2\cdot\vec{b}_2 + 0\cdot\vec{b}_3$$

$$[T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{b}_3) = A\vec{b}_3 = 2\vec{b}_3 = 0\cdot\vec{b}_1 + 0\cdot\vec{b}_2 + 2\cdot\vec{b}_3$$

$$[T(\vec{b}_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matrix repræsentation af T m.h.t. $\mathcal{B}$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \ [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} \ [T(\vec{b}_3)]_{\mathcal{B}} \right] =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D \quad \text{diagonalmatrix}$$

Afsnit 4.5 : $\quad [T]_{\mathcal{B}} = B^{-1} A B = D$

hvor $\quad B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A = BDB^{-1}$$ diagonalisering.

Definition

A: $n \times n$ matrix

A er diagonaliserbar hvis der findes diagonal matrix D og invertibel matrix P

så
$$A = PDP^{-1}$$

Sætning 5.2

A: $n \times n$

Hvis $\{\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n\}$ er basis for $\mathbb{R}^n$

og der findes egenværdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

så $A\vec{p}_1 = \lambda_1 \vec{p}_1 \quad \dots \quad A\vec{p}_n = \lambda_n \vec{p}_n$

så er $A = PDP^{-1}$

hvor $P = [\vec{p}_1 \ \dots \ \vec{p}_n]$ og $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

Og omvendt ..

Anvendelse

A : $n \times n$ matrix

Udregn $A^{100} = A \cdot A \cdot A \dots A$

Find diagonalisering $A = PDP^{-1}$

(hvis muligt)

$$A^2 = A \cdot A = PDP^{-1}PDP^{-1} = PDDP^{-1}$$

$$= PD^2P^{-1}$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = PD\underbrace{P^{-1}P}D\underbrace{P^{-1}P}DP^{-1}$$

$$= PDDDP^{-1} = PD^3P^{-1}$$

$$A^{100} = PD^{100}P^{-1}$$

Hvis $D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ så er $D^{100} = \begin{bmatrix} a^{100} & 0 & 0 \\ 0 & b^{100} & 0 \\ 0 & 0 & c^{100} \end{bmatrix}$

$A: n \times n$

A er diagonaliserbar hvis

sum af multipliciteter af egenværdier $= n$

og dim af egenrum $=$ multiplicitet af egenværdi.

<u>Eks</u> $A: 6 \times 6$

$$\det(A - tI_n) = (t-2)^3 (t-5)(t^2+1)$$

Sum af multipliciteter: $3 + 1 = 4 < 6$

A ikke diagonaliserbar

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_3) = -(t-3)(t-1)^2$$

Egenrum hørende til $\lambda = 1$

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En fri variabel: x_3

dimension af egenrum $= 1$

multiplicitet $= 2$

A er ikke diagonaliserbar

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_2) = \det \begin{bmatrix} 2-t & 2 \\ 1 & 1-t \end{bmatrix} =$$

$$(2-t)(1-t) - 2 = 2 - 2t - t + t^2 - 2 =$$

$$t^2 - 3t = t(t-3) = (t-0)(t-3)$$

Egenverdier: 0, 3

Egenrum $\lambda = 0$

$$A - 0 \cdot I_2 = A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 fri , $x_1 + x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis : $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Egenrumm $\lambda = 3$

$$A - 3I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

x_2 fri , $x_1 - 2x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis for egenrum: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ basis for $\mathbb{R}^2$

$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ invertibel matrix

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Så er $A = PDP^{-1}$

Eks

A: 4×4

$$\det(A - tI_4) = (t+3)(t-3)(t-6)(t-9)$$

Egenvardier: $-3, 3, 6, 9$

Hver med multiplicitet 1

Alle egenrum har dimension 1

Hvis $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4$ er egenvektorer

med egenværdier hhv $-3, 3, 6, 9$

og $P = [\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3 \ \vec{p}_4]$

og $D = \begin{bmatrix} -3 & & & 0 \\ & 3 & & \\ 0 & & 6 & \\ & & & 9 \end{bmatrix}$

Så er $A = PDP^{-1}$