Koordinatsystemer

Hvis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ er basis for et underrum V af $\mathbb{R}^n$ så findes der for enhver vektor $\mathbf{v} \in V$ entydige tal $c_1, c_2, \ldots, c_k$ så

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \ldots + c_k\mathbf{b}_k.$$

$\mathcal{B}$ udspænder V. Det betyder at $\mathbf{v}$ på mindst én måde kan skrives som linearkombination af $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ er lineært uafhængig. Det betyder at $\mathbf{v}$ på højst én måde kan skrives som linearkombination af $\mathcal{B}$.

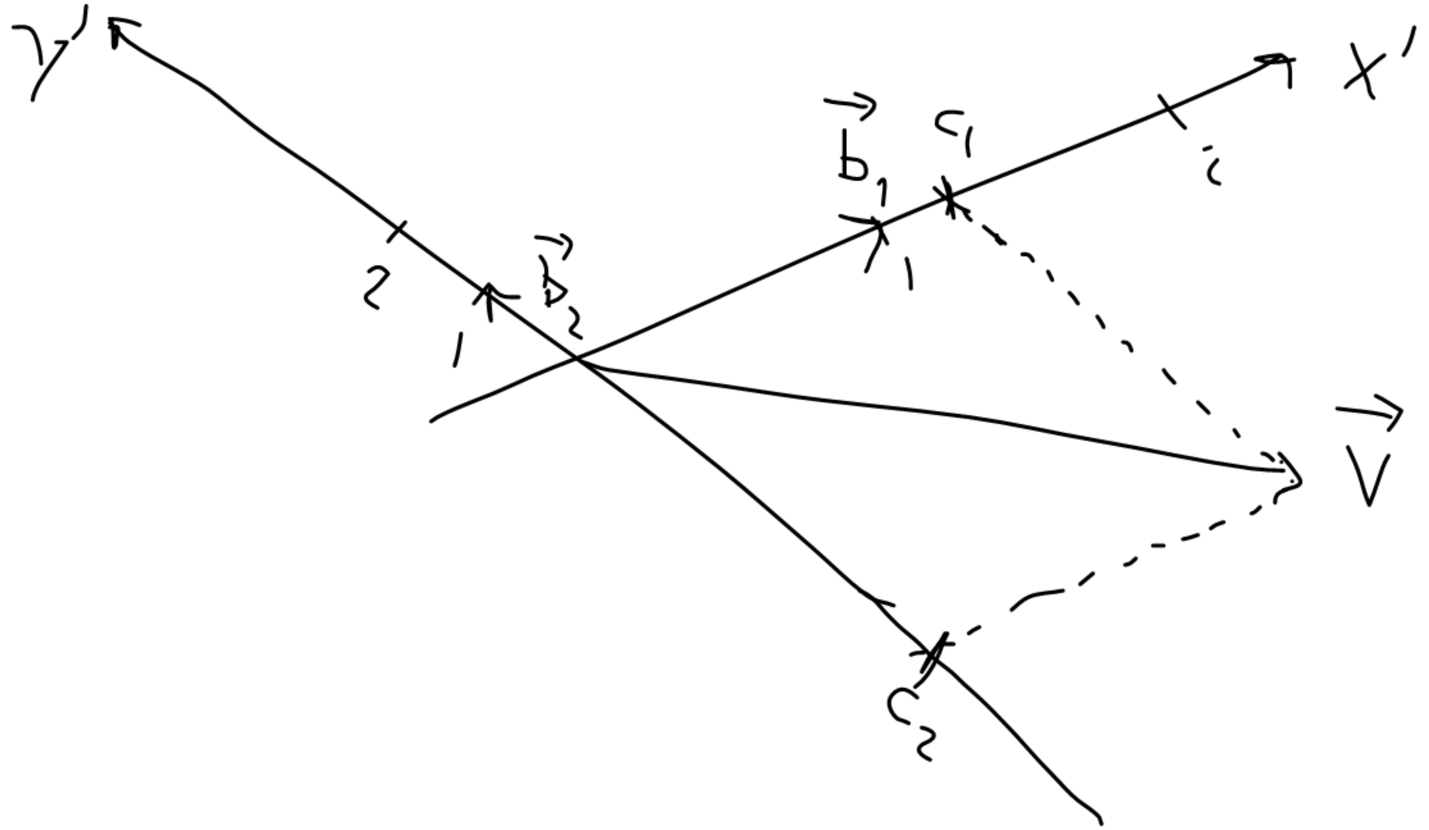
Koordinatvektor. (defineres kun for $V = \mathbb{R}^n$.)

Hvis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$
(hvor rækkefølgen af basisvektorerne er fastlagt)
så defineres koordinatvektoren for $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ m.h.t. $\mathcal{B}$ som

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

hvor $\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \ldots c_n\mathbf{b}_n$.

$\mathbb{R}^2$ basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \mathcal{B}$, $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$



Eks

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\vec{v} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\vec{v}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$, hvor $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^n$
og $B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \ldots\ \mathbf{b}_n]$ som er en $n \times n$ matrix.

Så er $\mathcal{B}$ en basis for $\mathbb{R}^n$ hvis og kun hvis B er invertibel.

Hvis $\mathcal{B}$ en basis for $\mathbb{R}^n$ så kan koordinatvektorer m.h.t. $\mathcal{B}$ bestemmes ved

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\mathbf{v}.$$

Omvendt: hvis koordinatvektoren $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ er kendt, så kan $\mathbf{v}$ bestemmes ved

$$\mathbf{v} = B[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Eks

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B & I_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Hvis $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

så er $\vec{v} = B[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Hvis $\vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ så er

$$[\vec{w}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\vec{w} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$