Egenvektorer og egenværdier

Lad A være $n \times n$ matrix.
En vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ siges at være en egenvektor for A hvis der findes et tal λ (lambda) så

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

λ siges at være en egenværdi for A hørende til egenvektoren $\mathbf{v}$.

Lad λ være en egen~~vektor~~ værdi for en $n \times n$ matrix A.
Egenrummet for A hørende til egenværdien λ er mængden af vektorer $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, der opfylder

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Egenrummet for A hørende til egenværdien λ er altså nulrummet af $A - \lambda I_n$.

$\mathrm{Null}\ A - \lambda I_n$

Egenrummet hørende til egenværdien λ består af alle egenvektorer hørende til egenværdien λ og $\mathbf{0}$.

Egenrummet er et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Er $\lambda = 2$ en egenverdi?

Hvis Ja: Find basis for egenrum.

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + 2x_3 = 0$, x_2, x_3 frie

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis for egenrum hørende til egenværdi 2:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Karakteristisk ligning/polynomium.

Lad A være en $n \times n$ matrix.
Så er $\lambda \in \mathbb{R}$ en egenværdi for A hvis og kun hvis

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Denne ligning kaldes den karakteristiske ligning for A.

$\det(A - tI_n)$ er et polynomium af grad n.
Det kaldes det karakteristiske polynomium for A.

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Karakteristisk polynomium:

$$\det(A - tI_2) = \det \begin{bmatrix} 2-t & -1 \\ -1 & 1-t \end{bmatrix} =$$

$$(2-t)(1-t) - (-1)\cdot(-1) = 2 - 2t - t + t^2 - 1$$

$$= t^2 - 3t + 1$$

Karakteristisk ligning

$$t^2 - 3t + 1 = 0 \qquad , \; D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Egenverdier: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

<u>Eks</u>

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_2) = \det \begin{bmatrix} 2-t & -1 \\ 1 & 1-t \end{bmatrix} =$$

$$(2-t)(1-t) - 1\cdot(-1) = 2 - 2t - t + t^2 + 1 =$$

$$t^2 - 3t + 3$$

$$D = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = -3 < 0$$

Ingen egenverdier.

$A : n \times n$

$$A \xrightarrow{-R_i \to R_i} B \qquad \det A = -\det B$$

$$\det(-A) = (-1)^n \det A$$

$$\det(tI_n - A) = (-1)^n \det(A - tI_n)$$

karakteristisk pol. i MATLAB

Rødder i polynomier.

Lad $f(x) = ax^2 + bx + c$ være et polynomium af grad 2. Diskriminanten er $D = b^2 - 4ac$.

Hvis $D > 0$ så har $f(x)$ rødder (nulpunkter) $r_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ og $r_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. Desuden er $f(x) = \underline{a(x - r_1)(x - r_2)}$.

Hvis $D = 0$ så har $f(x)$ dobbeltrod $r = \frac{-b}{2a}$ og $f(x) = \underline{a(x - r)^2}$.

Hvis $D < 0$ så har $f(x)$ ingen reelle rødder.

Lad $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ være et polynomium af grad n.

Et tal r siges at være rod i $f(x)$ hvis $f(r) = 0$.

Hvis r er rod i $f(x)$ så findes der et polynomium $g(x)$ af grad $n-1$ så $f(x) = (x-r)g(x)$.

Hvis r også er rod i $g(x)$ så findes et polynomium $h(x)$ af grad $n-2$ så $g(x) = (x-r)h(x)$ og dermed $f(x) = (x-r)^2 h(x)$.

Multipliciteten af r som rod i $f(x)$ er det største tal m så $f(x)$ kan skrives som $f(x) = (x-r)^m g(x)$ hvor $g(x)$ er et polynomium af grad $n-m$.

Hvis $f(x)$ har reelle rødder $r_1, r_2, \ldots, r_k$ med multiplicitet henholdsvis $m_1, m_2, \ldots, m_k$ så kan $f(x)$ skrives som

$$f(x) = (x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2} \cdots (x - r_k)^{m_k} g(x),$$

hvor $g(x)$ er et polynomium, der ikke har reelle rødder
(f.eks. $g(x) = a_n$).

Multiplicitet af egenværdi.

Lad λ være en egenværdi for matricen A.

Multipliciteten af egenværdien λ defineres da som multipliciteten af λ som rod i det karakteristiske polynomium $\det(A - tI_n)$.

(Dette kaldes også den *algebraiske* multiplicitet af λ.)

Dimensionen af egenrummet Null $(A - \lambda I_n)$ opfylder

$$1 \leq \dim \text{Null } (A - \lambda I_n) \leq \text{multipliciteten af } \lambda.$$

Eks

A : 10×10 matrix

$$\det(A - tI_{10}) = (t-3)(t+1)^3(t-2)^2 t^2 (t^2+1)$$

$(t-(-1))$ $\quad$ $(t-0)$

Egenværdier	multiplicitet	dim af egenrum
3	1	1
-1	3	1, 2, eller 3
2	2	1 eller 2
0	2	1 eller 2

$t^2 + 1 = 0$ har ingen løsning

Egenværdier af similære matricer.

Lad A og B være similære $n \times n$ matricer, $B = P^{-1}AP$. Så er

$$\det(A - tI_n) = \det(B - tI_n).$$

Da matricerne har samme karakteristiske polynomium, har de de samme egenværdier med de samme multipliciteter.

Desuden har egenrummet for A hørende til egenværdien λ samme dimension som egenrummet for B hørende til egenværdien λ.

PC må ikke medtages til eksamen.

Bogen købes senest i uge 47.