Matricer, vektorer og regneoperationer

En $m \times n$ **matrix** A består af mn tal skrevet i m rækker og n søjler.
a_{ij} er tallet der står i række i, søjle j.
$i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ og $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

En $m \times 1$ matrix er en **(søjle-) vektor** med m komponenter.
Indgang i i vektoren $\mathbf{v}$ betegnes ofte v_i.
Mængden af disse vektorer skrives $\mathbb{R}^m$.

En $1 \times n$ matrix er en **rækkevektor** med n komponenter.

Hvis A og B begge er $m \times n$ matricer så defineres **sum** af A og B ved:
$A + B$ er $m \times n$ matricen, hvor der i indgang (i, j) står $a_{ij} + b_{ij}$.

Hvis A er en $m \times n$ matrix og $c \in \mathbb{R}$ er en skalar (tal) så defineres **skalar multiplikation** ved:
cA er $m \times n$ matricen hvor der i indgang (i, j) står ca_{ij}.

Hvis A er en $m \times n$ matrix så defineres den **transponerede** matrix ved:
A^T er $n \times m$ matricen hvor der i indgang (i, j) står a_{ji}.

Identitetsmatricen (enhedsmatricen) I_n er $n \times n$ matricen med 1-taller på diagonalen og 0 udenfor diagonalen.

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Søjlevektorerne i I_n betegnes $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ og kaldes **standard vektorer**.

Dette kan også skrives som $I_n = [\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_n]$.

Hvis $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ er (søjle-) vektorer og $c_1, c_2, \ldots, c_k$ er skalarer så siger vi at udtrykket

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$$

er en **linear kombination** af $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Prikprodukt, norm, ortogonalitet

Lad $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Så er **prikproduktet** af $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ defineret som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

$\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ siges at være **ortogonale** hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Normen (længden) af $\mathbf{u}$ er

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2} = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}.$$

Afstanden mellem $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er $||\mathbf{u}-\mathbf{v}||$.

Normalisering af $\mathbf{v}$:
Hvis $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ så er $\frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v}$ en vektor med norm 1.

Pythagoras: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ hvis og kun hvis $||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2$.

Ortogonal projektionen af $\mathbf{u}$ på linien med retningsvektor $\mathbf{v}$, hvor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ beregnes som

$$\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||^2}\mathbf{v}.$$