Span og lineær uafhængighed

$\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$: en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Mængden af alle vektorer i $\mathbb{R}^n$, der er linear kombination af vektorerne i $\mathcal{S}$ kaldes mængden (underrummet) udspændt af $\mathcal{S}$.
Skrives: Span $\mathcal{S}$.

En vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ ligger i Span $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$
hvis og kun hvis
$[\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_k \ \mathbf{v}]$ ikke har pivotposition i sidste søjle.

En mængde $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ af vektorer i $\mathbb{R}^n$ siges at være

lineært afhængig hvis der findes skalarer $c_1, c_2, \ldots, c_k$, som ikke alle er 0 sådan at $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 \ldots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$.

lineært uafhængig hvis ligningen

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 \ldots + x_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

kun er opfyldt når $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_k = 0$.

Enhver mængde af vektorer er enten lineært afhængig eller lineært uafhængig, men ikke både lineært afhængig og lineært uafhængig.

Ovenstående ligning er **homogen**, idet højresiden er nulvektoren.

Når en løsningen til et homogent ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ skrives på vektorform med metoden fra afsnit 1.3, så skrives den som linear kombination af lineært uafhængige vektorer, (forudsat at der er frie variable).

$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$: en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$.

(Sætning 1.6)
Span $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} = \mathbb{R}^n$
hvis og kun hvis
$A = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_k]$ har pivotposition i alle rækker.

(Sætning 1.8)
$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ er lineært uafhængig
hvis og kun hvis
$A = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_k]$ har pivotposition i alle søjler.

Sætning 1.7
Span $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} =$ Span $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}\}$
hvis og kun hvis
$\mathbf{v} \in$ Span $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$.

Sætning 1.9
$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ er lineært afhængig
hvis og kun hvis
enten $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ eller der findes $j \geq 2$ sådan $\mathbf{u}_j$ er linear kombination af $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}$.

Hvis søjle j i $A = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_k]$ ikke er en pivotsøjle så er $\mathbf{u}_j$ en linear kombination af $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}$.