Dimension af underrum

V: underrum af $\mathbb{R}^n$.
Hvis $V \neq \{\mathbf{0}\}$ så har V uendeligt mange baser.

Alle baser for V har det samme antal vektorer.

Antallet af vektorer i en basis for V kaldes **dimensionen** af V, skrives $\dim V$.

Vi definerer desuden $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

V: underrum af $\mathbb{R}^n$.

Antag $\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ er en lineært uafhængig mængde af vektorer i V.
Så er $k \leq \dim V$.
Hvis $k = \dim V$ så er $\mathcal{S}_1$ en basis for V.

Antag $\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ er en mængde af vektorer i V, der udspænder V.
Så er $p \geq \dim V$.
Hvis $p = \dim V$ så er $\mathcal{S}_2$ en basis for V.

Underrum knyttet til en matrix
A: en $m \times n$ matrix.

Fra tidligere:
rank $A =$ antal søjler i A med pivot
nullity $A = n -$ rank $A =$ antal søjler uden pivot $=$ antal frie variable i ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Søjler med pivot udgør en basis for søjlerummet, Col A.
Altså $\dim \mathrm{Col}\ A = \mathrm{rank}\ A$.

En basis for nulrummet af A bestemmes som i afsnit 1.3, med en basisvektor for hver fri variabel.
Altså $\dim \mathrm{Null}\ A = \mathrm{nullity}\ A$.

$$\dim \mathrm{Null}\ A \ + \ \dim \mathrm{Col}\ A \ = n.$$

Hvis $\texttt{rref}(A) = R$, så er Row $A =$ Row R.
Rækker i R med pivot (altså alle rækker forskellig fra 0) udgør en basis for Row A.

Derfor er $\dim \text{Row } A = \text{rank } A$.

Desuden er $\dim \text{Row } A = \text{rank } A^T$, da Row $A =$ Col A^T.

Altså $\text{rank } A = \text{rank } A^T$.