

Egenvektorer og egenverdier

Lad A være $n \times n$ matrix.

En vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ siges at være en egenvektor for A hvis der findes et tal λ (lambda) så

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

λ siges at være en egenverdi for A hørende til egenvektoren \mathbf{v} .

Lad λ være en egenvektor for en $n \times n$ matrix A .

Egenrummet for A hørende til egenværdien λ er mængden af vektorer $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, der opfylder

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Egenrummet for A hørende til egenværdien λ er altså nulrummet af $A - \lambda I_n$.

Egenrummet hørende til egenværdien λ består af alle egenvektorer hørende til egenværdien λ og $\mathbf{0}$.

Egenrummet er et underrum af \mathbb{R}^n .

Karakteristisk ligning/polynomium.

Lad A være en $n \times n$ matrix.

Så er $\lambda \in \mathbb{R}$ en egen værdi for A hvis og kun hvis

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Denne ligning kaldes den karakteristiske ligning for A .

$\det(A - tI_n)$ er et polynomium af grad n .

Det kaldes det karakteristiske polynomium for A .

Rødder i polynomier.

Lad $f(x) = ax^2 + bx + c$ være et polynomium af grad 2.

Diskriminanten er $D = b^2 - 4ac$.

Hvis $D > 0$ så har $f(x)$ rødder (nulpunkter) $r_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ og $r_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$. Desuden er $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.

Hvis $D = 0$ så har $f(x)$ dobbeltrod $r = \frac{-b}{2a}$ og $f(x) = a(x - r)^2$.

Hvis $D < 0$ så har $f(x)$ ingen reelle rødder.

Lad $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ være et polynomium af grad n .

Et tal r siges at være rod i $f(x)$ hvis $f(r) = 0$.

Hvis r er rod i $f(x)$ så findes der et polynomium $g(x)$ af grad $n - 1$ så $f(x) = (x - r)g(x)$.

Hvis r også er rod i $g(x)$ så findes et polynomium $h(x)$ af grad $n - 2$ så $g(x) = (x - r)h(x)$ og dermed $f(x) = (x - r)^2 h(x)$.

Multipliciteten af r som rod i $f(x)$ er det største tal m så $f(x)$ kan skrives som $f(x) = (x - r)^m g(x)$ hvor $g(x)$ er et polynomium af grad $n - m$.

Hvis $f(x)$ har reelle rødder r_1, r_2, \dots, r_k med multiplicitet henholdsvis m_1, m_2, \dots, m_k så kan $f(x)$ skrives som

$$f(x) = (x - r_1)^{m_1} (x - r_2)^{m_2} \dots (x - r_k)^{m_k} g(x),$$

hvor $g(x)$ er et polynomium, der ikke har reelle rødder (f.eks. $g(x) = a_n$).

Multiplicitet af egenværdi.

Lad λ være en egenværdi for matricen A .

Multipliciteten af egenværdien λ defineres da som multipliciteten af λ som rod i det karakteristiske polynomium $\det(A - tI_n)$.

(Dette kaldes også den *algebraiske* multiplicitet af λ .)

Dimensionen af egenrummet $\text{Null}(A - \lambda I_n)$ opfylder

$$1 \leq \dim \text{Null}(A - \lambda I_n) \leq \text{multipliciteten af } \lambda.$$

Egenværdier af similære matricer.

Lad A og B være similære $n \times n$ matricer, $B = P^{-1}AP$. Så er

$$\det(A - tI_n) = \det(B - tI_n).$$

Da matricerne har samme karakteristiske polynomium, har de de samme egenværdier med de samme multipliciteter.

Desuden har egenrummet for A hørende til egenværdien λ samme dimension som egenrummet for B hørende til egenværdien λ .