Ortogonale og ortonormale mængder.

Lad $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ være en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{S}$ siges at være ortogonal hvis vektorerne i $\mathcal{S}$ er parvis ortogonale.

$\mathcal{S}$ siges at være ortonormal hvis $\mathcal{S}$ er ortogonal og vektorerne i $\mathcal{S}$ alle har norm 1.

Enhver ortogonal mængde $\mathcal{S}$ af vektorer forskellig fra $\mathbf{0}$ er lineært uafhængig.

Ortogonal projektionen af $\mathbf{u}$ på linien Span$\{\mathbf{v}\}$, hvor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ beregnes som

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{v}||^2}\mathbf{v}.$$

Hvis $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er en **ortogonal basis** for et underrum W af $\mathbb{R}^n$ og $\mathbf{u} \in W$ så er

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k,$$

hvor

$$c_i = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i}{||\mathbf{v}_i||^2}.$$

Hvis $\mathcal{S}$ er orto*normal* så er

$$c_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i.$$

Gram-Schmidt ortogonalisering.

Lad $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ være en basis for et underrum W af $\mathbb{R}^n$.
Så har W en ortogonal basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ der kan bestemmes ved Gram-Schmidt ortogonalisering:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||^2}\mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_2||^2}\mathbf{v}_2$$

$$\ldots$$

En ortonormal basis $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ kan derefter bestemmes ved normalisering af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, altså ved at beregne $\mathbf{w}_i = \frac{1}{||\mathbf{v}_i||}\mathbf{v}_i$, for $i = 1, \ldots, k$.

QR-faktorisering.

$A = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k]$: en $n \times k$ matrix med lineært uafhængige søjler (og dermed $n \geq k$).

Så findes $n \times k$ matrix $Q = [\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k]$ hvor $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ er en ortonormal mængde,
og en $k \times k$ øvre triangulær matrix R
sådan at $A = QR$.
Dette kaldes QR-faktorisering af A.

$\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ bestemmes fra $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ ved Gram-Schmidt ortogonalisering og normalisering.
R bestemmes ved $r_{ij} = \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{w}_i$.

Lad $A = QR$ være en QR-faktorisering af en $n \times k$ matrix med lineært uafhængige søjler.

Vi betragter ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
Da A har pivot i alle søjler er der *højst* én løsning.

Da $Q^T Q = I_k$ har vi

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; QR\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; Q^T QR\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}.$$

Da R er en øvre triangulær matrix med tal $\neq 0$ på diagonalen så er det sidste ligningssystem konsistent og det er let at løse.

Men $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \not\Leftarrow R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$.

For at løse $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (ved hjælp af QR-faktorisering) skal vi løse $R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$ og derefter indsætte løsningen i $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Hvis dette ikke er en løsning så er $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ inkonsistent.