MCG - 1

Regneoperationer der kan bruges på vektorer:

Vektoraddition: hvis $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er vektorer så er $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ en vektor.

$(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) + (w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}) = (v_0 + w_0, v_1 + w_1, \ldots, v_{n-1} + w_{n-1})$.

Skalarmultiplikation: hvis $\mathbf{v}$ er en vektor og a er et tal (skalar) så er $a\mathbf{v}$ en vektor.

$$a(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) = (av_0, av_1, \ldots, av_{n-1}).$$

Alle sædvanlige regneregler gælder for disse regneoperationer.
F.eks. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ og $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Hvis $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{n-1}}$ er vektorer og $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ er tal så kaldes udtrykket

$$a_0\mathbf{v_0} + a_1\mathbf{v_1} + \ldots + a_{n-1}\mathbf{v_{n-1}}$$

en linear kombination af $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{n-1}}$.

Mængden af vektorer der kan skrives som linear kombination af $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{n-1}}$ kaldes mængden (underrummet) udspændt af $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{n-1}}$.

Hvis én af de n vektorer $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{n-1}}$ kan skrives som linear kombination af de andre $n-1$ vektorer så siges vektorerne at være lineært afhængige. Ellers er de lineært uafhængige.

Prikproduktet af to vektorer $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ og $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \ldots, w_{n-1})$ er defineret ved

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_0 w_0 + v_1 w_1 + \ldots + v_{n-1} w_{n-1}.$$

Prikproduktet kan også beregnes som

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ||\mathbf{v}||\ ||\mathbf{w}|| \cos\theta$$

hvor θ er vinklen mellem vektorerne.

$\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er ortogonale hvis $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Længden af $\mathbf{v}$ er $||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_0^2 + v_1^2 + \ldots + v_{n-1}^2}$.

Prikproduktet opfylder følgende regneregler:

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
- $a(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (a\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (a\mathbf{w})$
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ og
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ hvis og kun hvis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Længde af vektorer opfylder

- $||\mathbf{v}|| \geq 0$ og $||\mathbf{v}|| = 0$ hvis og kun hvis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

- $||a\mathbf{v}|| = |a| \; ||\mathbf{v}||$

- $||\mathbf{v} + \mathbf{w}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||$.

Disse regler opfyldes også af Manhattan normen

$$||\mathbf{v}||_{\ell_1} = |v_0| + |v_1| + \ldots + |v_{n-1}|$$

hvor $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$.

Normalisering af en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v}.$$

$\hat{\mathbf{v}}$ har samme retning $\mathbf{v}$ og længde 1.

Projektionen af en vektor $\mathbf{v}$ på en vektor $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ er

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{w}||^2}\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{w}})\hat{\mathbf{w}}.$$

Vektoren

$$\mathrm{perp}_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathrm{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$$

er ortogonal på $\mathbf{w}$.

En mængde af vektorer $\{\mathbf{w_0}, \mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_{n-1}}\}$ siges at være ortonormal hvis vektorerne er parvis ortogonale og de har længde 1.

Gram-Schmidt ortogonalisering af lineært uafhængige vektorer $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{n-1}}$:

Sæt

- $\mathbf{w_0} = \mathbf{v_0}$
- $\mathbf{w_1} = \mathbf{v_1} - \mathrm{proj}_{\mathbf{w_0}}\mathbf{v_1}$
- $\mathbf{w_2} = \mathbf{v_2} - \mathrm{proj}_{\mathbf{w_0}}\mathbf{v_2} - \mathrm{proj}_{\mathbf{w_1}}\mathbf{v_2}$
- $\ldots$

Generelt:

$$\mathbf{w_i} = \mathbf{v_i} - \mathrm{proj}_{\mathbf{w_0}}\mathbf{v_i} - \ldots - \mathrm{proj}_{\mathbf{w_{i-1}}}\mathbf{v_i}.$$

Beregn dernæst

$$\mathbf{\hat{w}_0}, \mathbf{\hat{w}_1}, \ldots, \mathbf{\hat{w}_{n-1}}.$$

Disse vektorer er ortonormale.