MCG - 3

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$: tre lineært uafhængige vektorer i $\mathbb{R}^3$.

Lad højre hånds pegefinger pege i retning $\mathbf{u}$ og langefingeren pege i retning $\mathbf{v}$. Så siger vi at $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ er højrehåndet hvis $\mathbf{w}$ er på samme side af planen udspændt af $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ som tommelfingeren. Ellers er $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ venstrehåndet.

Eksempel: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ er højrehåndet.

Lad $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ og $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$.

Så er krydsproduktet defineret ved

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_y w_z - w_y v_z, v_z w_x - w_z v_x, v_x w_y - w_x v_y).$$

$\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ er vektoren ortogonal på $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$, der opfylder at

$\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ er højrehåndet, og

$||\mathbf{v} \times \mathbf{w}|| = ||\mathbf{v}||\ ||\mathbf{w}|| \sin\theta$, hvor θ er vinklen mellem $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$.

$||\mathbf{v} \times \mathbf{w}||$ er arealet af et parallelogram hvor to af siderne er $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$.

Vektor tripelprodukt:

Hvis $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er to vektorer i $\mathbb{R}^3$ (ikke-parallelle) så er

$$\mathbf{w},\ \mathbf{v}\times\mathbf{w},\ \mathbf{w}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$$

en højrehåndet ortogonal basis.
(Alternativ til Gram-Schmidt.)

Skalar tripelprodukt:

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w} \times \mathbf{u})$$

er et tal som er

- positivt hvis $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ er højrehåndet,
- negativt hvis $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ er venstrehåndet,
- 0 hvis $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ er lineært afhængige.

$|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$ er volumen (rumfang) af et parallelepipedum hvor $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ er tre af kanterne.

Hvis V er en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$ som opfylder

- $\mathbf{v} \in V$ og $\mathbf{w} \in V \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$.

- $\mathbf{v} \in V$ og $c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\mathbf{v} \in V$.

så siger vi at V er et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Hvis $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d$ er lineært uafhængige vektorer der udspænder V så siger vi at $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d\}$ er en basis for V. d er da dimensionen af V.

Underrum af dimension 0: $\{\mathbf{0}\}$
Underrum af dimension 1: linie gennem $\mathbf{0}$.
Underrum af dimension 2: plan gennem $\mathbf{0}$.

Affin rum af dimension 1: linie (ikke gennem $\{\mathbf{0}\}$).
Affin rum af dimension 2: plan (ikke gennem $\{\mathbf{0}\}$).

Et affint rum består af punkter på formen

$$P + \mathbf{v}, \quad P \in V,$$

hvor V er et underrum og $\mathbf{v}$ er en fast vektor.

P_0 og P_1: to forskellige punkter.
Der findes en entydig linie der går gennem begge punkter. Den består punkter på formen

$$tP_0 + (1-t)P_1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Liniestykket mellem P_0 og P_1 består af punkterne

$$tP_0 + (1-t)P_1, \quad \text{hvor } 0 \leq t \leq 1.$$

En mængde siges at være konveks hvis det for ethvert par af punkter P_0, P_1 i mængden gælder at liniestykket mellem dem også er indeholdt i mængden.

Lad $P_0, \ldots, P_k$ være punkter.
Udtrykket

$$a_0 P_0 + a_1 P_1 + \ldots + a_k P_k, \quad \text{hvor } a_0 + a_1 + \ldots + a_k = 1$$

kaldes en affin kombination af $P_0, \ldots, P_k$.

Mængden af punkter der kan skrives som affin kombination af $P_0, \ldots P_k$ er et affint rum.

$P_0, \ldots P_k$ siges at være affint afhængige hvis ét af punkter kan skrives som affin kombination af de andre k punkter.
Ellers er $P_0, \ldots, P_k$ affint uafhængige.

W: et affint underrum.
Hvis ethvert punkt i W er affin kombination af $P_0, \ldots, P_k$ og disse punkter er affint uafhængige så siges $P_0, \ldots, P_k$ at udgøre et simplex.

Ethvert punkt P i W kan da skrives (entydigt) som

$$a_0 P_0 + a_1 P_1 + \ldots + a_k P_k, \quad \text{hvor } a_0 + a_1 + \ldots + a_k = 1.$$

$a_0, a_1, \ldots, a_k$ kaldes de barycentriske koordinater for P.