MCG - 6

Hvis A er en $m \times n$ matrix så er funktionen

$$\mathcal{S} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$$

som er defineret ved

$$\mathcal{S}(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

en lineær transformation.

Hvis $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ er lineær transformation, der opfylder

$$\mathcal{T}(\mathbf{e}_0) = \mathbf{a}_0,\ \mathcal{T}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathcal{T}(\mathbf{e}_{n-1}) = \mathbf{a}_{n-1},$$

hvor

$$\mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

så er

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}) = A\mathbf{v},$$

hvor A er matricen

$$\left[\mathbf{a}_0\ \mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{n-1}\right].$$

Hvis $\mathcal{S} : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^m$ som er defineret ved $\mathcal{S}(\mathbf{w}) = A\mathbf{w}$

og $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$ som er defineret ved $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$

er lineære transformationer,
så er

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{T} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$$

også en lineær transformation og

$$(\mathcal{S} \circ \mathcal{T})(\mathbf{v}) = (AB)\mathbf{v}.$$

Hvis $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ er en lineær transformation så definerer vi nulrummet af $\mathcal{T}$ som

$$N(\mathcal{T}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}.$$

Dette er et underrum af $\mathbb{R}^n$.
Dimensionen af $N(\mathcal{T})$ betegnes *nullity*$(\mathcal{T})$.

Billedrummet af $\mathcal{T}$ defineres som

$$R(\mathcal{T}) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m \mid \text{der findes } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \text{ så } \mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}.$$

Dette er et underrum af $\mathbb{R}^m$.
Dimensionen af $R(\mathcal{T})$ kaldes rangen af $\mathcal{T}$ og skrives *rank*$(\mathcal{T})$.

Dimensionsformel:

$$\textit{nullity}(\mathcal{T}) + \textit{rank}(\mathcal{T}) = n.$$

Ligningssytemet

$$
\begin{array}{rcl}
a_{00}x_0 + & a_{01}x_1 + \ldots + a_{0,n-1}x_{n-1} = & b_0 \\
a_{10}x_0 + & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} = & b_1 \\
\vdots & & \\
a_{m-1,0}x_0 + & a_{m-1,1}x_1 + \ldots + a_{m-1,n-1}x_{n-1} = & b_{m-1}
\end{array}
$$

har udvidet koefficientmatrix (totalmatrix)

$$
\begin{bmatrix}
a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} & b_0 \\
a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & b_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m-1,0} & a_{m-1,1} & \cdots & a_{m-1,n-1} & b_{m-1}
\end{bmatrix}
$$

Elementære rækkeoperationer på matricer:

1. gang en række med et tal $k \neq 0$
2. række i erstattes af (række i) $+ k \cdot$ (række j), $i \neq j$
3. ombyt to rækker.

To $m \times n$ matricer siges at være rækkeækvivalente hvis den ene kan fås fra den anden ved brug af et antal elementære rækkeoperationer.

To lineære ligningssystemer hvis udvidede koefficientmatricer er rækkeækvivalente har samme løsningsmængde.

En matrix er på trappeform hvis

1. rækker hvor der kun er 0'er står nederst
2. det første element i en række som er $\neq 0$ er 1 (kaldes det ledende element eller pivot)
3. et ledende element i en række står i en søjle til højre for det ledende element i rækken over.

En matrix på trappeform er på reduceret trappeform hvis

4. en søjle med et ledende element (pivot) har 0 i alle andre rækker.

Løsning af lineært ligningssystem (når den udvidede koefficient matrix er på reduceret trappeform)

Hvis sidste søjle har en pivot så er der en ligning på formen:

$$0x_0 + \ldots + 0x_{n-1} = 1,$$

og ligningssystemet er dermed inkonsistent (ingen løsninger).

Hvis der er pivotposition i alle søjler undtagen den sidste så er der en entydig løsning til ligningssystemet.

Hvis der ikke er pivotposition i sidste søjle og der ikke er pivotposition i yderligere mindst én søjle, så er der uendeligt mange løsninger.