MCG - 11

$\mathbf{R}$ er 3×3 matricen for en rotation.

Find akse-vinkel repræsentationen af denne rotation: altså en retnningsvektor $\hat{\mathbf{r}} = (x, y, z)$ og en vinkel θ så $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{r}}\theta}$.

Udregn trace$(\mathbf{R}) = R_{00} + R_{11} + R_{22}$.

Så er $\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{2}(\text{trace}(\mathbf{R}) - 1))$. Det giver $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.
$\cos^{-1}$ skrives også som arccos.

Hvis $\theta = 0^\circ$: ingen rotation, $\hat{\mathbf{r}}$ er vilkårlig.

Hvis $\theta \neq 0^\circ$ og $\theta \neq 180^\circ$:

$$\mathbf{r} = (R_{21} - R_{12}, R_{02} - R_{20}, R_{10} - R_{01}), \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{||\mathbf{r}||}\mathbf{r}.$$

Hvis $\theta = 180^\circ$: Bestem det største af tallene R_{00}, R_{11}, R_{22}.

R_{00} størst: $\quad x = \frac{1}{2}\sqrt{R_{00} - R_{11} - R_{22} + 1}, \quad y = \frac{R_{01}}{2x}, \quad z = \frac{R_{02}}{2x}.$

R_{11} størst: $\quad y = \frac{1}{2}\sqrt{R_{11} - R_{00} - R_{22} + 1}, \quad x = \frac{R_{01}}{2y}, \quad z = \frac{R_{12}}{2y}.$

R_{22} størst: $\quad z = \frac{1}{2}\sqrt{R_{22} - R_{00} - R_{11} + 1}, \quad x = \frac{R_{02}}{2z}, \quad y = \frac{R_{12}}{2z}.$

En **kvaternion** q skrives som

$$q = (w, x, y, z),$$

eller

$$q = w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Hvis vi sætter $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ så skriver vi også

$$q = (w, \mathbf{v}),$$

eller

$$q = w + \mathbf{v}.$$

Addition af kvaternioner:

$$(w_1, x_1, y_1, z_1)+(w_2, x_2, y_2, z_2) = (w_1+w_2, x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2).$$

Skalarmultiplikation:

$$a(w, x, y, z) = (aw, ax, ay, az).$$

Magnitude af kvaternion:

$$||q|| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2},$$

hvor $q = (w, x, y, z)$.

Hvis $q \neq (0, 0, 0, 0)$ har kvaternionen

$$\frac{1}{||q||}q$$

magnitude 1 og siges at være normaliseret.

Rotation om aksen $\hat{\mathbf{r}}$ med vinkel θ repræsenteres af kvaternionen

$$q = (\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\mathbf{r}}).$$

Eller

$$(\cos\left(\frac{360^\circ - \theta}{2}\right), \sin\left(\frac{360^\circ - \theta}{2}\right)(-\hat{\mathbf{r}})) = (-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\mathbf{r}}) = -q.$$

Matricen for rotationen, der er repræsenteret af den normaliserede kvaternion $q = (w, x, y, z)$:

$$\begin{bmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy-2wz & 2xz+2wy \\ 2xy+2wz & 1-2x^2-2z^2 & 2yz-2wx \\ 2xz-2wy & 2yz+2wx & 1-2x^2-2y^2 \end{bmatrix}$$