

Prøve i “Matematik for programmører”
Spiluddannelsen, 7. semester
28. marts 2007, i tidsrummet 10.00-14.00

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages. Herunder lommeregner, men ikke personlige computere og mobiltelefoner. Det er vigtigt, at tankegangen bag opgaveløsningerne fremgår af besvarelsen og at mellemregninger medtages i passende omfang. De anførte procenter angiver med hvilken vægt, de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse. Skriv jeres fulde navn på hver eneste side af jeres besvarelse. Nummerer siderne fortløbende og angiv, hvor mange sider der er ialt.

Opgave 1: (4 %) Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Udregn determinanten $\det(A)$ (det er ikke nok alene at benytte lommeregner)

Opgave 2: (8 %) Lad punktet P_1 være givet ved de sfæriske koordinater $\rho = 1$, $\phi = 45^\circ$ og $\theta = 45^\circ$. Lad punktet P_2 være givet ved de sfæriske koordinater $\rho = 2$, $\phi = 45^\circ$ og $\theta = 45^\circ$.

1. Find de Cartesiske koordinater for P_1 og P_2 .
2. Find de sfæriske koordinater for $P_1 + P_2$.

Opgave 3: (17 %) Lad vægtene i en vægtet graf G være givet på følgende måde:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	-	1	4	-	-
v_2	1	-	4	1	-
v_3	4	4	-	1	14
v_4	-	1	1	-	22
v_5	-	-	14	22	-

(Her betyder “-” ud for v_i og v_j , at der ingen kant er mellem v_i og v_j . Tilsvarende betyder “1” ud for v_i og v_j , at der er en kant mellem v_i og v_j af vægt 1 og “2” ud for v_i og v_j betyder, at der er en kant mellem v_i og v_j af vægt 2 osv.)

Vi vil finde en korteste vej fra v_1 til v_5 . Lad en heuristisk funktion være givet ved $h(v_1) = 17$, $h(v_2) = 16$, $h(v_3) = 12$, $h(v_4) = 15$, $h(v_5) = 0$.

1. Er den heuristiske funktion monoton?
2. Er den heuristiske funktion tilladelig med hensyn til v_5 ?
3. Find ved hjælp af en passende A^* -algoritme en korteste vej fra v_1 til v_5 .

Opgave 4: (4 %) Lad

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Eftervis at den inverse matrix A^{-1} er givet ved

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

(det er ikke nok alene at benytte lommeregner).

Opgave 5: (20 %) I denne opgave laves en stykkevis Hermitekurve gennem punkterne P_0 , P_1 og P_2 , hvor

$$P_0 = (1, 0, 0)$$

$$P_1 = (0, 1, 0)$$

$$P_2 = (0, 0, 1)$$

Som sædvanlig kaldes kurvestykket mellem P_0 og P_1 for $Q_0(u)$ og kurvestykket mellem P_1 og P_2 kaldes $Q_1(u)$. Vi søger $Q_0(u)$ og $Q_1(u)$ således at følgende holder:

$$Q_0(0) = P_0$$

$$Q_0(1) = P_1$$

$$Q_1(0) = P_1$$

$$Q_1(1) = P_2$$

$$\vec{Q}'_0(1) = \vec{Q}'_1(0)$$

$$\vec{Q}''_0(1) = \vec{Q}''_1(0)$$

$$\vec{Q}''_0(0) = \vec{0}$$

$$\vec{Q}''_1(1) = \vec{0}$$

1. Opskriv matrixligning til bestemmelse af $\vec{P}'_0$, $\vec{P}'_1$ og $\vec{P}'_2$.
2. Find $\vec{P}'_0$, $\vec{P}'_1$ og $\vec{P}'_2$ (det er tilladt at benytte resultatet fra opgave 4)
3. Bestem $Q_0(u)$ og $Q_1(u)$.

Opgave 6: (12 %) I denne opgave arbejdes der med Lagrangepolynomiet $P(t)$ af tredje grad, som opfylder

$$P(0) = (1, 0, 0)$$

$$P(1) = (0, 1, 0)$$

$$P(2) = (0, 0, 1)$$

$$P(3) = (1, 0, 0)$$

1. Bestem $P(t)$

(det er tilladt at benytte formelen:

$$(t-a)(t-b)(t-c) = t^3 - (a+b+c)t^2 + (ab+ac+bc)t - abc)$$

2. Bestem hastigheden $P'(t)$ til tiden $t = 1$
3. Bestem acceleration $P''(t)$ til tiden $t = 1$

Opgave 7: (20 %) I denne opgave udføres der en række på hinanden følgende affine transformationer (i 3D).

Først skaleres der langs y -aksen med en faktor 3.

1. Opskriv matricen som beskriver denne affine transformation.

Dernæst roteres der omkring akse $(3, 0, 4)$ med 180° .

2. Opskriv matricen som beskriver den affine transformation svarende til først at skalere med en faktor 3 langs y -aksen og dernæst at rotere omkring akse $(3, 0, 4)$ med 180° .

Til sidst udføres translation med forskydningsvektoren $\vec{t} = (-1, -2, -1)$.

3. Opskriv matricen som beskriver den affine transformation svarende til først at udføre ovennævnte skalering, dernæst at udføre ovennævnte rotation og til sidst at udføre ovennævnte translation.
4. Hvad bliver punktet $(0, 0, 0)$ flyttet over i?

Opgave 8: (15 %)

1. Opskriv kvaternionen som svarer til rotation om akse $(2, 2, 1)$ med vinklen 90°
2. Opskriv kvaternionen som svarer til rotation om akse $(1, 0, 0)$ med vinklen 90°

Vi forestiller os nu, at vi først roterer omkring akse $(2, 2, 1)$ med vinklen 90° og dernæst roterer omkring akse $(1, 0, 0)$ med vinklen 90° . Den samlede operation svarer ifølge teorien til en rotation.

3. Find kvaternionen hørende til den samlede operation
4. Hvad bliver punktet $(1, 0, 0)$ flyttet over i under den samlede operation?
5. Forklar hvorledes man kan finde matricen hørende til den samlede operation (udregningerne skal ikke foretages).

Husk, at I kan sende bud efter mig, hvis der er tvivlsspørgsmål.

God arbejdslyst
venligst
Olav