Skriftlig eksamen
Matematik 1A

Prøveeksamen MR1 januar 2008

Tilladte hjælpemidler Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), og også elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer.

Det er ikke tilladt at kommunikere med andre eksaminander.

Vedr. besvarelse: Svar på de enkelte spørgsmål skal skrives ind i dette opgavesæt, og hele opgavesættet skal afleveres, med nedenstående oplysninger udfyldt.

Det er tilladt at aflevere udregninger, enten ved at skrive dem ind på disse ark, eller ved at vedlægge ark med udregninger. Sådanne ark skal påføres navn og personnummer, samt studiekortnummer.

Skriv resultater i de rammer, der er ved spørgsmålene, eller sæt kryds ved valgte muligheder.

Vedr. bedømmelsen: Korrekt besvarelse af en opgave giver 10 point. Således giver korrekt besvarelse af alle 12 opgaver i sættet 120 point.

Navn:

CPR-NR:

Studiekortnummer:

Opgave 1. Afgør, om nedenstående udsagn er sande eller falske. Marker svaret nedenfor.

(a) Ligningen $\dfrac{1}{\sin(x)} = y$ har uendelig mange reelle løsninger x for alle reelle tal y

◯ sand

◯ falsk

Svar: falsk

(b) Ligningen $\arcsin(y) = x$ har mindst én reel løsning y for alle reelle tal x.

◯ sand

◯ falsk

Svar: falsk

(c) Ligningen $\arctan(y) = x$ har højst én reel løsning y for alle reelle tal x.

◯ sand

◯ falsk

Svar: sand

Opgave 2. Bestem Taylor polynomiet af grad 2 for funktionen $f(x) = \arccos(x)$ med udviklingspunkt $a = -\dfrac{1}{2}$.

Svar:

$$2/3\,\pi - 2/3\,\sqrt{3}\,(x+1/2) + 2/9\,\sqrt{3}\,(x+1/2)^2$$

Opgave 3. Funktionen $f(x, y)$ er givet ved

$$f(x, y) = -3\,x^2y^2 - 3\,\sin(x + y)$$

(a) Find differentialet df af denne funktion.

Svar:

$$df = \big(-6\,xy^2 - 3\,\cos(x + y)\big)\,dx + \big(-6\,x^2y - 3\,\cos(x + y)\big)\,dy$$

(b) Der er givet punkterne P og Q, hvor

$$P = (-1, -1) \quad \text{og} \quad Q = (-0.849, -1.25)$$

Brug værdien af $f(P)$ og differentialet bestemt ovenfor til at approksimere værdien af $f(Q)$. Angiv svaret med 3 betydende cifre.

Svar:

$$-0.990$$

Opgave 4. Der er givet en funktion $f(x, y)$ defineret for alle $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Denne funktion har kontinuerte partielle afledede for alle $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Der er givet et punkt $P(a, b)$ i xy-planen. Antag at for en enhedsvektor $\mathbf{u}$ gælder, at $D_{\mathbf{u}} f(a, b) \leq 0$, og for en enhedsvektor $\mathbf{v}$, der opfylder $\mathbf{v} \neq \mathbf{u}$ og $\mathbf{v} \neq -\mathbf{u}$, gælder, at $D_{\mathbf{v}} f(a, b) \geq 0$. Marker alle de af følgende udsagn, der er rigtige.

◯ Værdien $f(a, b)$ kan være en lokal minimumsværdi for f.

◯ Værdien $f(a, b)$ kan være en lokal maximumsværdi for f.

◯ Der findes funktioner f, således at $f(a, b)$ ikke er en lokal ekstremumsværdi for f.

Svar: Alle tre udsagn er rigtige.

Opgave 5. En flade S i rummet er givet ved ligningen

$$z + xz - yz - xy = -5$$

Et punkt på fladen er $P(-2, 2, 3)$. Besvar nedenstående spørgsmål.

(a) Bestem en normalvektor til fladen S i punktet P givet ovenfor.

Svar: $(1, -1, -3)$ eller en vektor parallel med denne.

(b) Find ligningen for tangentplanen til fladen S i punktet P givet ovenfor. Skriv svaret på formen $ax + by + cz = d$.

Svar: $x - y - 3z = -13$

Opgave 6. Området R er en trekant i xy-planen med hjørnerne A, B, og C, hvor

$$A(2,2), \quad B(4,3), \quad C(2,3)$$

Beregn integralet

$$\iint_R f(x,y)dA, \quad \text{hvor } f(x,y) = x^3y$$

Gennemfør de to trin beskrevet nedenfor.

(a) Integralet kan omskrives til et itereret integral. Marker alle de rigtige måder at opskrive det på.

○ $\displaystyle\int_2^4 \int_2^{\frac{1}{2}x+1} x^3y\,dy\,dx$

○ $\displaystyle\int_2^3 \int_{2y-2}^4 x^3y\,dx\,dy$

○ $\displaystyle\int_2^3 \int_2^{2y-2} x^3y\,dx\,dy$

○ $\displaystyle\int_2^4 \int_{\frac{1}{2}x+1}^3 x^3y\,dy\,dx$

Svar: Tredje og fjerde mulighed er de rigtige.

(b) Beregn værdien af integralet.

Svar: $\dfrac{284}{5}$

Opgave 7. Området R er det endelige område, der er afgrænset af de to parabler

$$x = -y^2 + 4\,y - 3 \quad \text{og} \quad x = -\frac{1}{2}\,y^2 + 2\,y - 3/2$$

(a) Bestem koordinaterne til skæringspunkterne i xy-planen af de to parabler.

Svar: $(0,1)$ og $(0,3)$

(b) Bestem arealet af området R i xy-planen.

Svar: $\displaystyle\int_1^3 (-1/2\,y^2 + 2\,y - 3/2)dy = 2/3$

(c) Legemet T består af alle de punkter, der ligger over området R i xy-planen og under planen med ligningen

$$z = 2\,x + 2$$

Legemet T kan også beskrives ved, at det er det endelige legeme, der er afgrænset af de parabolske cylindre

$$x = -y^2 + 4\,y - 3 \quad \text{og} \quad x = -\frac{1}{2}\,y^2 + 2\,y - 3/2$$

og de to planer

$$z = 0 \quad \text{og} \quad z = 2\,x + 2$$

Bestem volumen af T.

Svar: $\displaystyle\int_1^3 \int_{-1/2\,y^2+2\,y-3/2}^{-y^2+4\,y-3} (2\,x+2)dx\,dy = \frac{32}{15}$

Opgave 8. Der er givet en funktion

$$f(x, y) = xy^2 + x^2y^2$$

og et område

$$R = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq 2\}$$

(a) Bestem den absolutte maksimumsværdi og den absolutte minimumsværdi af funktionen $f(x, y)$ på området R.

Svar: Den absolutte minimumsværdi er -1.

Den absolutte maksimumsværdi er 24

(b) I hvilket punkt, eller i hvilke punkter, i R antages den absolutte minimumsværdi?

Svar: Den absolutte minimumsværdi antages i punktet $(-\frac{1}{2}, 2)$.

(c) I hvilket punkt, eller i hvilke punkter, i R antages den absolutte maksimumsværdi?

Svar: Den absolutte maksimumsværdi antages i punktet $(2, 2)$.

Opgave 9. En partikels bevægelse i planen er givet ved

$$\mathbf{r}(t) = (t^3 - 6t^2, t^4 - 4t^3).$$

(a) Bestem hastighedsvektoren for bevægelsen i planen beskrevet ved $\mathbf{r}(t)$

$$\boxed{}$$

Svar: $\mathbf{r}'(t) = (3t^2 - 12t, 4t^3 - 12t^2)$

(b) Bestem accelerationsvektoren for bevægelsen i planen beskrevet ved $\mathbf{r}(t)$

$$\boxed{}$$

Svar: $\mathbf{r}''(t) = (6t - 12, 12t^2 - 24t)$

(c) For hvilke værdier af t er krumningen af kurven beskrevet ved $\mathbf{r}(t)$ defineret?

$$\boxed{}$$

Svar: For alle $t \neq 0$.

(d) For hvilke værdier af t er krumningen af kurven beskrevet ved $\mathbf{r}(t)$ lig med nul?

$$\boxed{}$$

Svar: For $t = 2$ og $t = 6$.

Opgave 10. Der er givet den komplekse ligning

$$z^3 - 6z^2 + 12z = 0$$

(a) Bestem alle komplekse løsninger til denne ligning. Resultaterne skal gives på formen $a + ib$, hvor a og b er *reelle* tal.

Svar:

$$0, \quad 3 + i\sqrt{3}, \quad 3 - i\sqrt{3}$$

(b) Skriv hver af de fundne løsninger på polær form.

Svar:

$$0 = (0)_\theta \text{ for et vilkårligt reelt } \theta, \quad 3 + i\sqrt{3} = (2\sqrt{3})_{\pi/6}, \quad 3 + i\sqrt{3} = (2\sqrt{3})_{-\pi/6}$$

Opgave 11. Der er givet den komplekse ligning

$$z^5 = i$$

Bestem alle de løsninger til denne ligning, der opfylder $\operatorname{Im} z > 0$. Angiv løsningen eller løsningerne på formen $re^{i\theta}$ med $r \geq 0$ og θ reel.

Svar:

$$e^{i\pi/10}, \quad e^{i\pi/2}, \quad e^{i9\pi/10}$$

Opgave 12. Der er givet en anden ordens differentialligning

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 11\frac{dx}{dt} + 30x = 0$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til denne ligning.

Svar:

$$x(t) = ae^{6\,t} + be^{5\,t}$$

for alle reelle a og b.

(b) Bestem den løsning til differentialligningen, der opfylder begyndelsesbetingelserne

$$x(-3) = 8, \quad \frac{dx}{dt}(-3) = 9$$

Svar:

$$x(t) = -31\,\frac{e^{6\,t}}{e^{-18}} + 39\,\frac{e^{5\,t}}{e^{-15}}$$