2. ordens lineære diff. lign.

Målet er at løse

$$ay'' + by' + cy = q(x), \qquad x \in I,$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$ og $q(x)$ er kontinuert på I.

Tilhørende homogene ligningen

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (H),$$

med karakterligningen

$$aR^2 + bR + c = 0 \qquad (K).$$

Den homogene ligning

Betragt igen

$$(H) \quad ay'' + by' + cy = 0 \qquad \text{og} \qquad (K) \quad aR^2 + bR + c = 0,$$

og lad

$$D = b^2 - 4ac$$

Værdi af D	Rødder i (K)	Fuldst. løsning til (H)
$D > 0$	$r_1 \neq r_2$	$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
$D < 0$	$\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$	$y(x) = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x\right)$
$D = 0$	r (dbb.rod)	$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$

Lineære afbildninger

En afbildning $L : V \to W$ kaldes lineær, hvis

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2),$$

for alle $y_1, y_2 \in V$ og alle skalarer c_1 og c_2.

Eksempel: Betragt $L : V \to W$ givet ved $L(f) := af'' + bf' + cf$, hvor V er de to gange kontinuert differentiable funktioner på $\mathbb{R}$ og W er de kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}$. L er lineær da

$$\begin{aligned} L(c_1 y_1 + c_2 y_2) &= a(c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + b(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + c(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1(a y_1'' + b y_1' + c y_1) + c_2(a y_2'' + b y_2' + c y_2) \\ &= c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2). \end{aligned}$$