Buelængde

Betragt en parametriseret kurve

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(y)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \qquad t \in I.$$

Buelængden fra $\mathbf{r}(a)$ til $\mathbf{r}(b)$ er givet ved

$$s = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt.$$

Buelængdefunktionen er givet ved:

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2 + z'(\tau)^2}\, d\tau.$$

Buelængde

Vi har,

$$\frac{ds}{dt} = v(t).$$

Hvis $v(t) > 0 \; \forall t$, så er s strengt voksende og vi kan finde dens inverse funktion $t(s)$. Buelængdeparametriseringen af kurven er givet ved

$$s \longrightarrow \mathbf{r}(t(s)).$$

Buelængdefunktion (iflg. kædereglen)

$$S(s) = \int_a^s \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \cdot \frac{dt}{ds}\, du = \int_a^s 1 du = s - a.$$

Krumning

Betragt den plane kurve

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(y)\mathbf{j}, \qquad t \in I.$$

Enhedstangentvektoren er givet ved

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j}.$$

Krumningen κ er defineret som

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|.$$

Krumning

Vi har,

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Specialtilfælde:

- Sædvanlig funktion af en variabel:

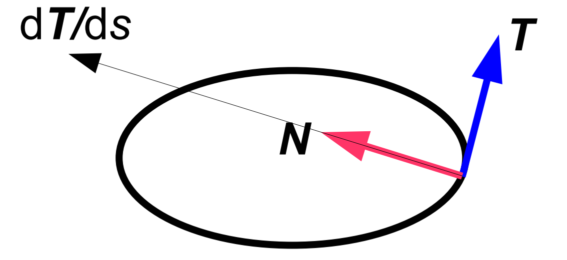
$$x = t, \quad y = f(t): \qquad \kappa = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

- Cirkel med radius a:

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t: \qquad \kappa = \frac{1}{a}.$$

Krumningscirkel

Den principale enhedsvektor $\mathbf{N}(t)$ er en enhedsvektor i $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$'s retning. Vi har,



$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}.$$

Krumningscirklen gennem et punkt P på kurven, hvor $\kappa \neq 0$, er den cirkel gennem P som er tangent til kurven, og har krumning κ. Centrum og radius for krumningscirklen er derfor:

$$\text{radius} : \rho = \frac{1}{\kappa} \qquad \text{centrum} : \overline{OP} + \rho\mathbf{N}.$$